



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

**DEFORMAČNĚ-NAPĚŤOVÁ ANALÝZA VYBRANÉ
PŘÍRUBY**

STRESS-STRAIN ANALYSIS OF CHOSEN PIPE FLANGE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Daniel Pařízek

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Kamil Novák

BRNO 2017

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student: **Daniel Pařízek**
Studijní program: Strojírenství
Studijní obor: Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce: **Ing. Kamil Novák**
Akademický rok: 2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Deformačně-napěťová analýza vybrané příruby

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Příruba je zesílený okraj trubky, který je určen pro spojení s jinou částí. Příruba má většinou tvar mezikruží, v něm jsou vyvrtané otvory pro spojení šrouby. Trubky s přírubou mohou být jednoduše spojovány a rozpojovány. Mezi spoj se obvykle vkládá těsnění. Příruba může být modelována jako složené těleso, tj. je nutné využít teorie rotačně symetrické momentové skořepiny, stěny a desky. K zvýšení úrovně výpočtového modelu musí být použita metoda konečných prvků.

Cíle bakalářské práce:

1. Provést rešerši zaměřenou na řešení složených těles
2. Provést deformačně-napěťovou analýzu vybrané příruby analyticky a numericky
3. Srovnat a diskutovat výsledky a použité modely

Seznam doporučené literatury:

TIMOSHENKO, Stephan a S. WOINOWSKY-KRIEGER. Theory of plates and shells. 2nd ed. Auckland: McGraw-Hill Book Company, 1976. ISBN 0070858209.

HARVEY, John F. Theory and design of pressure vessels. New York: Van Nostrand Reinhold, 1985. ISBN 0442232489.

HÖSCHL, Cyril. Pružnost a pevnost II. 1. vydání. Liberec: Vysoká škola strojní a textilní, 1992. ISBN 8070831049.

VENTSEL, Eduard a Theodor KRAUTHAMMER. Thin plates and shells: theory, analysis, and applications. New York: Marcel Dekker, 2001. ISBN 0824705750.

ONDRÁČEK, Emanuel, Jan VRBKA, Přemysl JANÍČEK a Jiří BURŠA. Mechanika těles: pružnost a pevnost II. 4. vydání. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. ISBN 8021432608.

JANÍČEK, Přemysl a Jindřich PETRUŠKA. Pružnost a pevnost II: úlohy do cvičení. 3. vydání. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. ISBN 9788021434417.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Bakalářská práce se zabývá deformačně-napěťovou analýzou vybraného typu příruby. Zvolena byla přivařovací příruba s krkem, normalizovaná dle evropské normy EN 1092-1+A1. Příruba je zprvu modelována jako složené těleso, uplatněním dostupných analytických přístupů vycházejících z teorie tenkostěnných desek a skořepin. Následně je deformačně-napěťová analýza provedena metodou konečných prvků v prostředí programu Ansys. V závěru práce je diskutována platnost výsledků získaných analytickým řešením ve vztahu k přesnému numerickému řešení.

Klíčová slova

příruba, deformačně-napěťová analýza, složená tělesa, teorie skořepin, Ansys

Abstract

The bachelor's thesis deals with stress-strain analysis of chosen type of pipe-flange. The chosen type was a Weld-Neck flange, normalized according to European standard EN 1092-1+A1. Initially, the pipe-flange is modelled as a composed solid body, using available analytical theories of thin-walled axisymmetric shells and plates. Then, the stress-strain analysis is performed using FEM software Ansys. In the end, the applicability of obtained analytical results is discussed, compared to the exact numerical solution.

Key Words

pipe-flange, stress-strain analysis, composed bodies, shell theory, Ansys

Bibliografická citace

PAŘÍZEK, D. *Deformačně-napěťová analýza vybrané příruby*. Brno, 2017, 97 s. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce: Ing. Kamil Novák

Prohlášení autora

Tímto prohlašuji, že svou bakalářskou práci na téma **Deformačně-napěťová analýza vybrané příruby** jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím odborné literatury a zdrojů, které jsou v práci citovány a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

V Brně dne 24. května 2017

.....
Daniel Pařízek

Poděkování

Na prvním místě bych chtěl velmi poděkovat Ing. Kamilu Novákovi za jeho ochotu, trpělivost, odborné rady a konzultace, které přispěly k vypracování této bakalářské práce. Mé poděkování patří rovněž Ing. Jiřímu Hůlkovi, Ph.D. za cenné rady ohledně výběru tématu. V neposlední řadě bych rád poděkoval přítelkyni Janě Rejentové za pomoc s programem \LaTeX .

Obsah

Úvod	1
1 Rešerše výpočtového aparátu z oblasti PP	3
1.1 Saint Venantův princip	3
1.2 Řešení úlohy obecné PP	5
1.2.1 Diferenciální přístup řešení úlohy PP	5
1.2.2 Variační přístup řešení úlohy PP	5
1.3 Elementární typy těles obecné pružnosti	6
1.3.1 Rotující kruhová a mezikruhová stěna	7
1.3.2 Kruhová a mezikruhová deska	9
1.3.3 Bezmomentová skořepina	10
1.3.4 Válcová momentová skořepina	11
2 Řešení složených těles	15
3 Rešerše z oblasti statistiky	17
3.1 Střední absolutní chyba	17
3.2 Maximální chyba	17
3.3 Koeficient determinace	17
4 Vstupy do výpočtu	21
5 Výpočtová část	23
5.1 MKP ve výpočtové části	24
5.2 Modelování příruby jako vetknuté stěny	25
5.3 Modelování příruby jako vetknuté skořepiny	28
5.4 Modelování příruby jako složeného tělesa	32
5.4.1 Řešení stěny	33
5.4.2 Řešení desky	34
5.4.3 Řešení skořepiny	36
5.4.4 Vyhodnocení	37
5.4.5 D-N stav skořepiny	37
5.4.6 D-N stav stěno-desky	40
5.5 Vliv poloměru zaoblení na napjatost	43
5.6 Vliv rozšiřující se tloušťky stěny na napjatost	45
5.7 Vliv síly předpětí ve šroubovém spoji	47
5.7.1 Řešení rovinné části příruby	49
5.7.2 Řešení krku příruby	52
5.7.3 Vyhodnocení a rozbor D-N stavu krku příruby	53
6 Modelování příruby jako 3D tělesa	57
6.1 Postup a cíle výpočtového modelování	57
6.2 Cyklická symetrie a konečnoprvková síť	58
6.3 Kontakty mezi tělesy	61
6.4 Okrajové podmínky a zatížení	62
6.5 Globální zhodnocení D-N stavu příruby	62
6.6 Zhodnocení D-N stavu krku příruby ve vztahu k analytickému řešení	65

6.6.1	Zhodnocení analytického modelu příruby AM2	67
6.6.2	Zhodnocení analytického modelu příruby AM1	68
6.6.3	Optimalizace analytického řešení	70
7	Závěr	75
	Literatura	77
	Seznam symbolů a zkratk	81
	Seznam obrázků	83
	Seznam tabulek	84

Úvod

Bakalářská práce se zabývá deformačně-napěťovou (dále jen D-N) analýzou vybraného typu příruby. Pod přírubou si lze představit zesílený okraj trubky, sloužící k snadné montáži a demontáži. Příruby se obvykle na okraje potrubí přivařují, mluvíme potom o přírubách přivařovacích. Existují však rovněž příruby závitové, které jsou na konec trubky našroubovány. Požadované těsnosti přírubového spoje je docíleno užitím vhodného typu těsnění, spojení s protikusem je pak nejčastěji realizováno pomocí šroubů, dotažených s přesně stanoveným předpětím.

Hlavním cílem této práce je vytvoření odpovídajícího analytického modelu vybraného typu příruby a následné zhodnocení získaných výsledků na základě numerického řešení pomocí metody konečných prvků (MKP). Pro analytické výpočty lze využít teorie Pružnosti a Pevnosti II (dále jen PP2), konkrétně elementárních typů těles obecné PP, kterými jsou rotačně symetrická stěna, deska a momentové skořepina. Aplikací těchto matematicky popsaných modelů budeme přírubu modelovat jako složené těleso.

Veškeré parametry týkající se geometrie, technologie výroby, zatížení a materiálu vybraného typu příruby budou vycházet z evropské normy ČSN EN 1092-1+A1, pojednávající o přírubách a přírubových spojích.

Aby byly zajištěny vhodné podmínky pro využití analytických metod řešení, budeme po čas celé práce předpokládat spojení vyšetřované příruby s tuhým víkem, které lze ve výpočtech modelovat jako nedeformovatelné, základové těleso. V rámci této práce tedy nebude vyšetřován klasický přírubový spoj, jakožto spojení dvou přírub.

1 Rešerše výpočtového aparátu z oblasti PP

Na úvod je třeba se seznámit se dvěma důležitými pojmy, které nás budou provázet po dobu celé práce – řeč je o pojmech **model** a **modelování**.

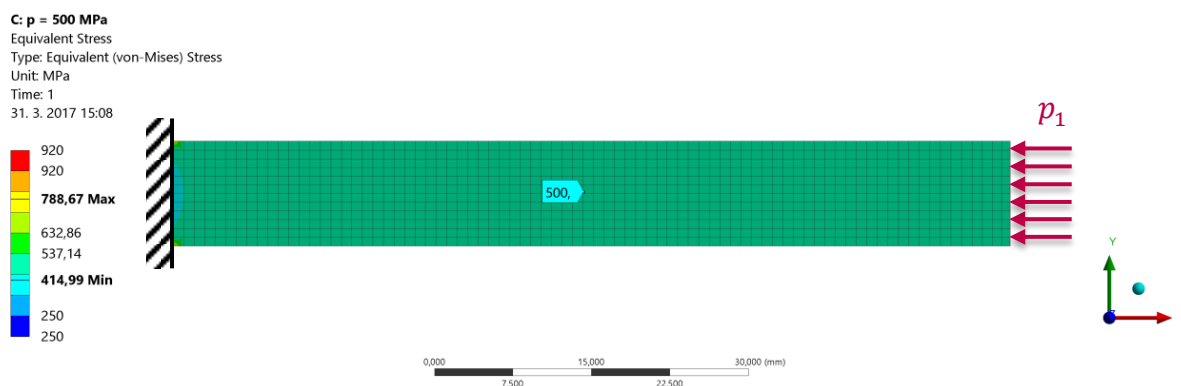
Při řešení D-N analýz, ale i jiných úloh pružnosti a pevnosti, je nutností popsat chování vyšetřovaného reálného tělesa užitím dostupných matematických aparátů, ať už analytických, nebo numerických. Do úvah však nelze zahrnout veškeré vlivy, které jsou s tímto reálným problémem spjaté. Z této skutečnosti vychází jeden ze současně nejpoužívanějších přístupů PP, tzv. **výpočtové modelování**. Princip tohoto přístupu spočívá v náhradě reálného tělesa tělesem modelovým (zkráceně **model**), které je podrobeno takovým zjednodušujícím předpokladům, které jednak umožní matematický popis a jehož následné řešení povede k získání vyhovujících výsledků ve vztahu k původnímu řešenému problému [1, 2].

1.1 Saint Venantův princip

V pružnosti a pevnosti často pracujeme se silami, jakožto vektorovými veličinami vázanými k jedinému bodu. Nutno si však uvědomit, že takovéto silové interakce nelze v reálném světě nikdy dosáhnout. Ať už je styčná plocha sebemenší v porovnání s globálními rozměry vyšetřovaného tělesa, vždy půjde o jistou formu rozloženého silového působení. Síla je tedy pouze abstraktního charakteru. V problematice staticky ekvivalentní náhrady skutečného rozloženého silového působení silou, popřípadě jiným staticky ekvivalentním silovým působením, hraje významnou roli Saint Venantův princip, který říká následující:

„Jestliže silové působení v δ okolí (plošném) bodu A nahradíme staticky ekvivalentním zatížením, pak se napětí tělesa významně změní pouze v δ' okolí (prostorovém) bodu A. [3]“

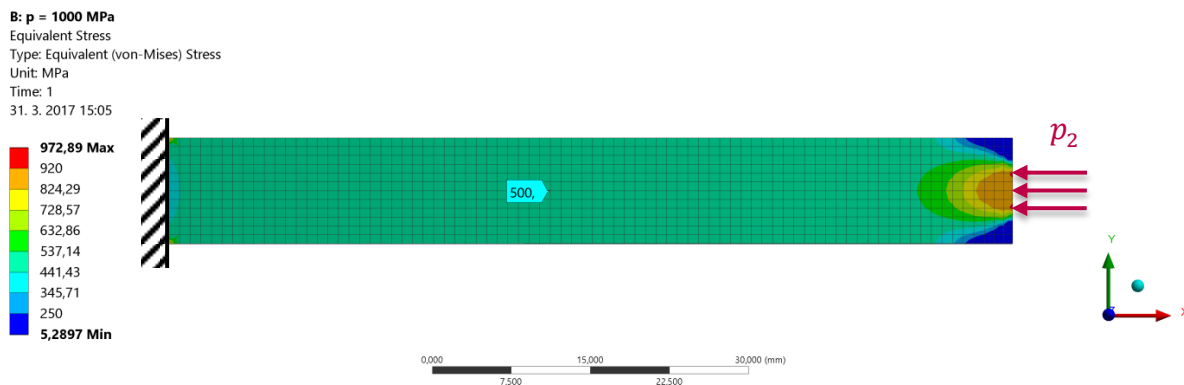
Z tohoto tvrzení vyplývá, že náhradou silového působení jiným, staticky ekvivalentním, silovým působením dojde ke změně napjatosti a deformace tělesa, avšak pouze na lokální úrovni (tzn. pouze v určitém prostorovém okolí stykového útvaru). Na globální deformačně-napěťový stav však tato náhrada nebude mít vliv.



Obr. 1.1: Prut zatížený tlakem p_1 .

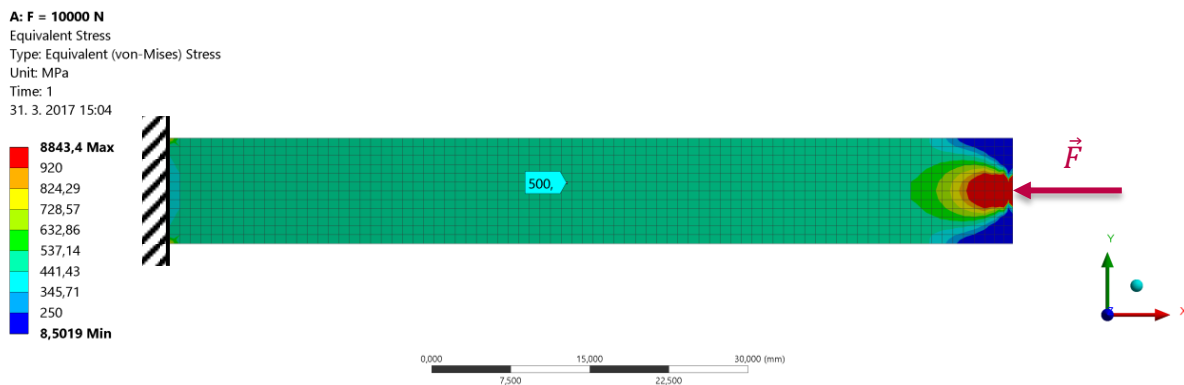
Na obrázku 1.1 můžeme vidět vetknuté prutové těleso o délce $l = 80$ mm, výšce $h = 10$ mm a tloušťce $b = 2$ mm, zatížené konstantním tlakem $p_1 = 500$ MPa po celé ploše příčného průřezu. Jak je patrné z obrázku, těleso je téměř po celé délce podrobena homogenní napjatosti. Napětí

zde dosahuje extrémních hodnot v místě vazby, neboť modelované vetknutí omezuje nejen posuv ve směru x , ale i zbylé dva posuvy v příčných směrech. Oblast vazby však pro tuto chvíli není předmětem našeho zájmu. Nyní se podívejme, jak se napjatost tělesa změní, pokud tlak p_1 nahradíme staticky ekvivalentním tlakem p_2 o hodnotě 1000 MPa, působícím na poloviční ploše v okolí těžiště příčného průřezu.



Obr. 1.2: Prut zatížený tlakem p_2 .

Z obrázku 1.2 je patrné, že takováto operace povede ke vzniku lokálních extrémů napětí v okolí stykového útvaru. Redukované napětí zde nabývá své maximální hodnoty 973 MPa. Pokud dále rozložené silové působení nahradíme staticky ekvivalentní silou F o velikosti 10000 N, působící v jediném bodě (konkrétně těžišti) příčného průřezu (viz obrázek 1.3), extrémní hodnota redukovaného napětí v místě působení vzroste na 8843 MPa.



Obr. 1.3: Prut zatížený silou F .

V obou případech však můžeme pozorovat, že v určité vzdálenosti od stykové plochy je napjatost beze změny. Analytické řešení pak můžeme považovat za platné pouze tehdy, je-li předmětem našeho zájmu tato, neovlivněná, oblast.

Uplatnění Saint Venantova principu při analytickém řešení problémů má značný význam, neboť často ani nevíme, jak je skutečné silové působení rozloženo. Ne vždy se totiž jedná o konstantní průběh, jako je demonstrováno na obrázcích 1.1 a 1.2. V případě, kdyby toto působení nabývalo obecného tvaru by se jednalo o úlohu nekonečněkrát staticky neurčitou – tzv. kontaktní problém. Analytické řešení takovéto úlohy bez uplatnění Saint Venantova principu by pak bylo takřka nemožné.

1.2 Řešení úlohy obecné PP

V pružnosti a pevnosti (dále jen PP) se můžeme setkat se dvěma typy úloh – úlohou přímou a úlohou nepřímou.

Úloha přímá je nejjednodušší úlohou pružnosti. U takové úlohy známe veškeré potřebné parametry vstupující do výpočtu (geometrie, zatížení, vazby, materiál), přičemž hledanými výstupy jsou napjatost a deformace.

V případě **nepřímých** (též **inverzních**) **úloh** mají vstupní parametry charakter proměnných, jejichž optimalizací se snažíme dosáhnout požadovaných hodnot na výstupu. V rámci této práce se budeme zabývat výhradně úlohou přímou.

Řešení úlohy obecné pružnosti spočívá v řešení soustavy vztahů, vedoucích k určení napjatosti a deformace daného zatíženého tělesa. Tuto soustavu vztahů nazýváme **systém vztahů obecné pružnosti** [4]. V základě se skládá z:

- rovnic rovnováhy sestavených pro uvolněný elementární prvek,
- geometrických vztahů vyjadřujících závislost mezi deformací a přetvořením,
- konstitutivních vztahů vyjadřujících vztah mezi tenzorem napětí a tenzorem deformace,
- rovnic kompatibility, neboli rovnic spojitosti, týkajících se především přetvoření (souvisí se silovou variantou řešení).

Konkrétní podobou jednotlivých vztahů se nebudeme zabývat na obecné úrovni, avšak pouze okrajově v souvislosti s elementárními typy těles obecné PP. Nyní se zaměříme na způsoby řešení této soustavy. Princip spočívá vždy v určení nezávislých parametrů, jejich vyjádření a následném dopočtu závislých parametrů. Dle charakteru nezávislých a závislých parametrů rozlišujeme dvě varianty řešení – variantu silovou a variantu deformační [4].

Silová varianta – nezávislé parametry tvoří vybrané složky tenzoru napětí, z nich následně počítáme parametry závislé, kterými jsou deformační posuvy.

Deformační varianta – nezávislé parametry jsou deformační posuvy, z nich následně počítáme napjatost.

Kromě variant řešení dále rozlišujeme dva typy algoritmů řešení, jedním je **diferenciální přístup** a druhým přístup **variační**.

1.2.1 Diferenciální přístup řešení úlohy PP

V případě **diferenciálního přístupu** vede řešení systému vztahů obecné pružnosti na soustavu parciálních diferenciálních rovnic, jejichž řešení lze jen ve velmi omezené míře vyjádřit v uzavřeném tvaru, tedy pomocí konečného počtu elementárních operací (sčítání, odčítání, násobení, dělení) a elementárních funkcí [4].

1.2.2 Variační přístup řešení úlohy PP

Na variačním přístupu je založena současně nejpoužívanější metoda mechaniky, známá jako **metoda konečných prvků** (zkráceně **MKP**). Princip této metody spočívá v rozdělení oblasti představující model řešeného tělesa na konečný počet geometricky jednoduchých podoblastí, tzv. prvků. V případě deformační varianty MKP, jsou hledanými neznámými parametry deformační posuvy uzlových bodů vytvořené konečnoprvkové sítě. Deformační posuv libovolného bodu, který náleží danému prvku, je pak v závislosti na deformačních posuvech uzlových bodů tohoto prvku, dán tzv. báзовými funkcemi. Tyto báзовé funkce jsou v případě MKP definovány na

každém prvku zvlášť. Jedná se přitom o polynomicke funkce, jejichž stupeň odpovídá typu použitého elementu.

Zatímco diferenciální přístup spočívá v sestavení diferenciálních rovnic a jejich následném řešení, **variační přístup** vychází z méně rozšířeného variačního počtu, jehož hlavní podstatou je minimalizace nějakého funkcionálu, což je „zobrazení z množiny funkcí do množiny čísel. Je to tedy pravidlo, podle něhož přiřadíme funkci na jejím definičním oboru (nebo jeho části) nějakou číselnou hodnotu. Příkladem je určitý integrál funkce. [1]“.

Základním pilířem uplatnění variačního přístupu při řešení úloh PP je skutečnost, že

„ze všech kinematicky přípustných stavů pružného tělesa nastává ten, jehož potenciální energie je minimální. [5]“

Princip řešení tak spočívá v hledání minima celkové potenciální energie tělesa. V případě deformační varianty MKP, na které je založen v této práci hojně využívaný software Ansys, pak mluvíme o **Lagrangeově variačním principu**. Celková potenciální energie tělesa je zde reprezentována kvadratickým funkcionálem Π_L , zvaným Lagrangeův potenciál, který je definován jako rozdíl energie napjatosti tělesa W a potenciální energie vnějšího zatížení P [6].

$$\Pi_L = W - P \quad (1.1)$$

Minimalizace tohoto funkcionálu vede v případě statických úloh PP na soustavu lineárních rovnic, kterou lze maticově vyjádřit jako

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F}, \quad (1.2)$$

kde \mathbf{K} je globální matice tuhosti, \mathbf{U} je matice neznámých deformačních posuvů a \mathbf{F} je celková matice zatížení [7]. Nutno poznamenat, že globální matice tuhosti \mathbf{K} je sama o sobě singulární, neboli její determinant $\det(\mathbf{K}) = 0$, což znamená, že soustava nemá jednoznačné řešení. Teprve definováním dostatečného počtu deformačních okrajových podmínek dojde k vynulování příslušných řádků a sloupců této matice a je tak zajištěna konvergence ke správnému řešení [7]. Řešením této soustavy pak získáme hledané deformační posuvy, které následně přepočítáváme pomocí geometrických rovnic na přetvoření a dále pomocí konstitutivních vztahů na napětí. Na teoretické úrovni se již nebudeme MKP dále zabývat. Mnohem podrobnější popis jednotlivých principů MKP lze naléznout např. v [7].

1.3 Elementární typy těles obecné pružnosti

Z hlediska analytického řešení pro nás mají největší význam tzv. elementární typy těles. Výhoda těchto těles spočívá v tom, že řešení diferenciální rovnice je možné vyjádřit v uzavřeném tvaru. Základní společnou vlastností elementárních typů těles je rotační symetrie. Ta musí být zachována jak ve vstupech (geometrie, materiál, zatížení a vazby), tak i ve výstupech (napjatost a deformace). Skripta z PP II [4] pojednávají celkem o šesti typech elementárních těles. V rámci této kapitoly se však seznámíme jen s těmi, které později využijeme během výpočtového modelování. Konkrétně nás bude zajímat:

1. rotující kruhová a mezikruhová stěna,
2. kruhová a mezikruhová deska,
3. bezmomentová skořepina,
4. válcová momentová skořepina.

Vybrané typy těles, kterými se budeme zabývat, jsou dále charakteristické svojí tenkostěnností. Tím je myšleno, že tloušťka stěny tělesa, obecně značená jako h , je znatelně menší v porovnání s ostatními rozměry. Tato vlastnost má pro řešení následující důsledky.

- Pro účely sestavení rovnic rovnováhy uvolňujeme prvek 2D elementární. Tloušťka stěny h zůstane rozměrem konečným.
- Napětí působící ve směru tloušťky stěny je nepodstatné, deformace však nikoliv. Těleso je tak podrobeno dvojsovému stavu napjatosti a trojosému stavu deformace. Obecně takovýto stav nazýváme rovinnou napjatostí (zkráceně RN). Je-li válcový souřadný systém r, t, z hlavním souřadným systémem napětí a deformace, pak pro tenzory napětí a deformace (například v případě modelů stěny a desky) platí

$$\mathbb{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_t & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad \mathbb{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nyní si nastíníme řešení jednotlivých těles. Odvozováním jednotlivých vztahů se nebudeme zabývat do detailu. Podrobnější řešení lze nalézt v [4], odkud budeme z velké části čerpat. Systém vztahů pro sestavení diferenciální rovnice se bude pro hlavní souřadný systém r, t, z napětí a deformace skládat z:

- rovnic rovnováhy sestavených pro 2D elementární prvek tělesa,
- geometrických rovnic

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r} \quad \varepsilon_z = \frac{dw}{dz} \quad (1.3)$$

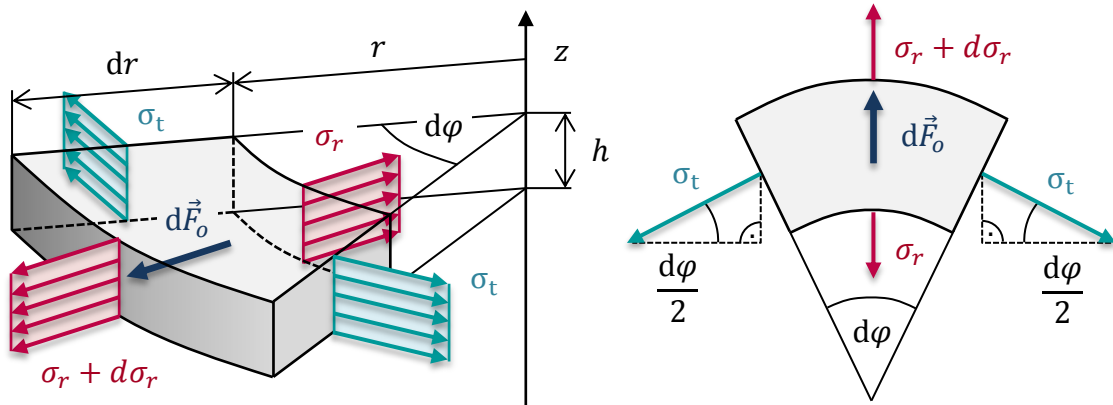
- a konstitutivních vztahů pro RN [4].

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_t) \quad \sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_t + \mu\varepsilon_r) \quad \sigma_z = 0 \quad (1.4)$$

1.3.1 Rotující kruhová a mezikruhová stěna

Pod rotující kruhovou a mezikruhovou stěnou si můžeme představit těleso tvaru kotouče, jehož tloušťka je významně menší v porovnání s ostatními rozměry. Stěna je zatížena vždy v rovině střednicové plochy. Nejtypičtějším je zatížení objemovými odstředivými silami, vzniklými v důsledku rotace stěny kolem své osy.

Pro účely sestavení rovnic rovnováhy uvolníme dvěma válcovými a dvěma meridiánovými řezy dvojnásobně elementární prvek.



Obr. 1.4: Dvojnásobně elementární prvek stěny [4].

Jedinou použitelnou rovnicí rovnováhy dostaneme ve směru radiálním. Na obrázku 1.4 vpravo vidíme uvolněný prvek z pohledu ze shora. Z tohoto obrázku budeme vycházet při sepisování rovnice rovnováhy.

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)hd\varphi - \sigma_r r h d\varphi - 2\sigma_t \sin \frac{d\varphi}{2} h dr + dF_o = 0 \quad (1.5)$$

Elementární objemovou sílu dF_o můžeme dle druhého Newtonova pohybového zákona rozepsat ve tvaru

$$dF_o = adm = (r\omega^2)\rho dV = (r\omega^2)\rho h r dr d\varphi = r^2 \omega^2 \rho h dr d\varphi \quad (1.6)$$

Uvážíme-li že sinus velmi malého úhlu je přibližně roven velikosti tohoto úhlu, neboli $\sin \frac{d\varphi}{2} \doteq \frac{d\varphi}{2}$, získáme rovnici rovnováhy v následujícím tvaru. Tato vlastnost plyne z rozvoje funkce $\sin \alpha$ do Taylorovy řady, kdy argument α této funkce je prvním členem rozvoje. Za podmínky, že úhel α je velmi malý jsou již další členy rozvoje zanedbatelné, neboť v nich figurují mocniny čím dál vyššího řádu.

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) - \sigma_r r - \sigma_t dr + r^2 \omega^2 \rho dr = 0 \quad (1.7)$$

Roznásobením jednotlivých členů a zanedbáním diferenciálů druhého řádu dostaneme rovnici rovnováhy v následující finální podobě.

$$\sigma_r - \sigma_t + r \frac{d\sigma_r}{dr} = -\rho r^2 \omega^2 \quad (1.8)$$

Z předpokladu tenkostěnnosti $h \ll r$ plyne, že napětí $\sigma_z = 0$. V případě desky tedy můžeme jednoznačně mluvit o stavu rovinné napjatosti. Jedinou nezávislou funkcí posuvu je radiální posuv u . Řešením systému rovnic pro elementární typy těles získáme obecnou nehomogenní diferenciální rovnici druhého řádu Eulerova typu.

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1 - \mu^2}{E} \rho r \omega^2 \quad (1.9)$$

Řešení diferenciální rovnice hledáme ve tvaru $u = \tilde{u} + u_p$, kde \tilde{u} je řešení homogenní a u_p řešení partikulární. Finální vztah pro radiální posuv $u(r)$ získáme ve tvaru

$$u(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1 - \mu^2}{8E} \rho r^3 \omega^2, \quad (1.10)$$

kde C_1 a C_2 jsou integrační konstanty. Hodnoty integračních konstant plynou z okrajových podmínek, sestavených pro konkrétní případ uložení a zatížení stěny. Dosazením do konstitutivních vztahů a substitucí pomocí konstant A a B , daných vztahy

$$A = \frac{E}{1 - \mu} C_1, \quad B = \frac{E}{1 + \mu} C_2,$$

vyjádříme závislosti radiálního a tečného napětí σ_r a σ_t ve tvaru

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2} - \frac{3 + \mu}{8} \rho r^2 \omega^2, \quad (1.11)$$

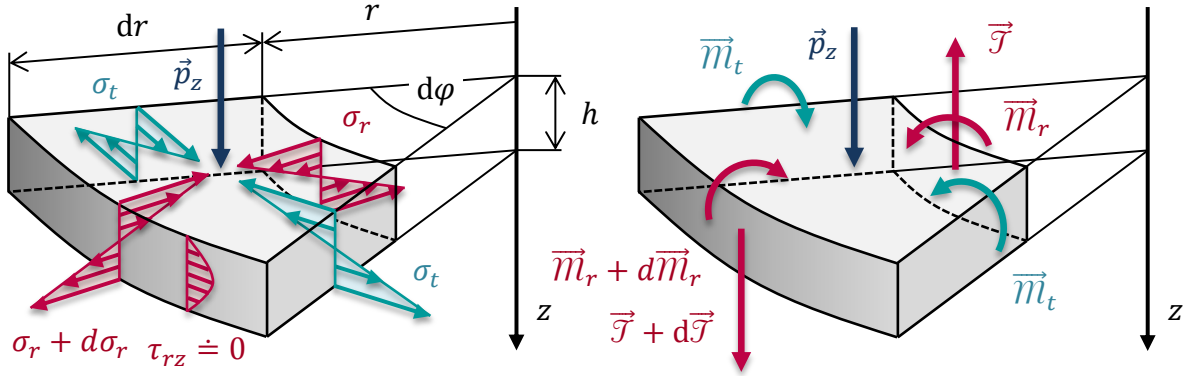
$$\sigma_t = A + \frac{B}{r^2} - \frac{1 + 3\mu}{8} \rho r^2 \omega^2. \quad (1.12)$$

Pomocí konstant A a B můžeme následujícím způsobem vyjádřit taktéž závislost radiálního posuvu u .

$$u(r) = \frac{1 - \mu}{E} A r + \frac{1 + \mu}{E} \frac{B}{r} - \frac{1 - \mu^2}{8E} \rho r^3 \omega^2 \quad (1.13)$$

1.3.2 Kruhová a mezikruhová deska

Geometrie kruhové a mezikruhové desky je totožná s geometrií stěny. Totožný je taktéž tvar uvolněného elementárního prvku. Jediný rozdíl je ve způsobu namáhání. V případě desky je totiž směr zatížení vždy kolmý na střednicovou plochu.



Obr. 1.5: Dvojnásobně elementární prvek desky [4].

Z uvolněného prvku lze sepsat dvě použitelné rovnice rovnováhy. Rovnici (1.14) ve směru axiálním a rovnici (1.15) ve směru tečném.

$$\frac{\mathcal{J}}{r} + \frac{d\mathcal{J}}{dr} + p_z = 0 \quad (1.14)$$

$$m_r - m_t + r \frac{dm_r}{dr} = \mathcal{J} r \quad (1.15)$$

Liniové momenty m_r a m_t (na obrázku 1.5 vpravo) představují momentové výslednice napětí σ_r a σ_t , působících na plochách řezu prvku. Jejich velikosti jsou tak dány integrály

$$m_r = \int_{-h/2}^{+h/2} z \sigma_r dz, \quad m_t = \int_{-h/2}^{+h/2} z \sigma_t dz. \quad (1.16)$$

Nezávislým deformačním parametrem může být buďto natočení desky ϑ nebo průhyb w . Za nezávislý parametr budeme považovat natočení ϑ , průhyb w bude parametrem závislým. Pomocí nezávislého deformačního parametru je třeba vyjádřit geometrické rovnice. Sestavením závislosti radiálního posuvu bodů desky u_r na natočení ϑ a jejím dosazením do vztahů (1.3) dostaneme

$$\epsilon_r = -z \frac{d\vartheta}{dr}, \quad \epsilon_t = -z \frac{\vartheta}{r}. \quad (1.17)$$

Dosadíme-li z geometrických rovnic do konstitutivních vztahů a následně do vztahů (1.16), dostaneme momenty m_r a m_t jako funkce natočení desky ϑ .

$$m_r = -B \left(\frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r} \right) \quad m_t = -B \left(\frac{\vartheta}{r} + \mu \frac{d\vartheta}{dr} \right) \quad (1.18)$$

Člen B značíme jako ohybová tuhost desky a definujeme ji vztahem

$$B = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}. \quad (1.19)$$

Dosazením do rovnice rovnováhy za momenty dostaneme následující diferenciální rovnici II. řádu Eulerova typu s pravou stranou (nehomogenní).

$$\frac{d^2 \vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{\vartheta}{r^2} = -\frac{\mathcal{T}}{B} \quad (1.20)$$

Řešení diferenciální rovnice má tvar

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} + \vartheta_p, \quad (1.21)$$

kde C_1 a C_2 jsou integrační konstanty a ϑ_p partikulární řešení dané vztahem

$$\vartheta_p = -\frac{1}{rB} \int r \left(\int \mathcal{T} dr \right) dr. \quad (1.22)$$

Průhyb w získáme integrací natočení podle r .

$$w = \int \vartheta dr = \frac{C_1 r^2}{2} + C_2 \ln r + C_3 + w_p \quad (1.23)$$

Partikulární řešení průhybu w_p získáme analogicky integrací partikulárního řešení natočení ϑ_p .

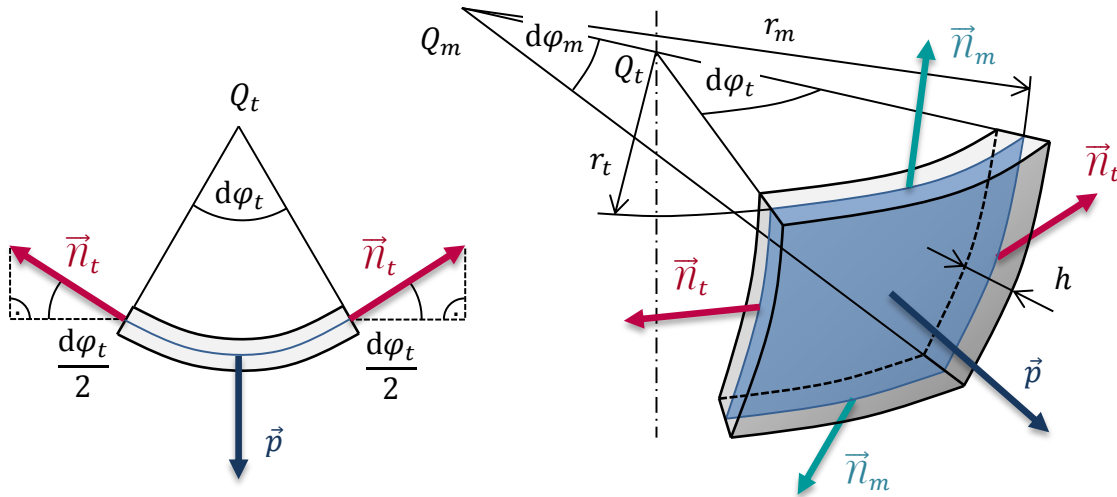
$$w_p = - \int \left\{ \frac{1}{rB} \int r \left(\int \mathcal{T} dr \right) dr \right\} dr \quad (1.24)$$

Jak lze vidět vlevo na obrázku 1.5, napětí σ_r a σ_t dosahují extrémních hodnot po horní a spodní vrstvě desky. Tyto extrémní hodnoty napětí získáme ze vztahů

$$\sigma_{r,ex} = \pm \frac{6m_r}{h^2}, \quad \sigma_{t,ex} = \pm \frac{6m_t}{h^2}. \quad (1.25)$$

1.3.3 Bezmomentová skořepina

Bezmomentovou skořepinou může být takřka libovolné tenkostěnné, rotačně symetrické těleso. Geometrie bezmomentové skořepiny je dána tvarem meridiánové křivky, jejíž rotací kolem osy vzniká střednicová plocha. Na obrázku 1.6 vidíme dvojnásobně elementární prvek uvolněný dvěma meridiánovými a dvěma kuželovými řezy. O kuželových řezech mluvíme proto, neboť plocha tohoto řezu je tvořena přímkami kolnými na meridiánovou křivku a protínajícími se v jediném bodě na ose skořepiny.



Obr. 1.6: Dvojnásobně elementární prvek bezmomentové skořepiny [4].

Pro bezmomentové skořepiny je typická tzv. **membránová napjatost**, která se vyznačuje konstantními průběhy napětí po tloušťce stěny. Rozlišujeme přitom napětí σ_t působící v tečném směru a napětí σ_m působící v meridiánovém směru. Bezmomentová skořepina tak může být namáhána buďto na tah nebo na tlak, nikoliv však na ohyb. Elementární prvek je již uvolněn pomocí staticky ekvivalentních výslednic – liniových sil n_t a n_m . Nejtypičtějším zatížením je zatížení vnitřním přetlakem p , který je již součástí bezmomentové teorie. Nyní sepíšeme rovnici rovnováhy v radiálním směru.

$$2n_t \sin \frac{d\varphi_t}{2} r_m d\varphi_m + 2n_m \sin \frac{d\varphi_m}{2} r_t d\varphi_t - p r_t d\varphi_t r_m d\varphi_m = 0 \quad (1.26)$$

Jelikož sinus velmi malého úhlu je přibližně roven tomuto úhlu, neboli $\sin \frac{d\varphi}{2} \doteq \frac{d\varphi}{2}$, můžeme psát

$$n_t d\varphi_t r_m d\varphi_m + n_m d\varphi_m r_t d\varphi_t - p r_t d\varphi_t r_m d\varphi_m = 0 \quad (1.27)$$

$$n_t r_m + n_m r_t - p r_t r_m = 0 \quad (1.28)$$

$$\frac{n_t}{r_t} + \frac{n_m}{r_m} = p \quad (1.29)$$

Již máme finální podobu rovnice rovnováhy v silách. Uvážíme-li že liniové síly n_t a n_m jsou s reálně působícím napětím svázány vztahy $\sigma_t = n_t/h$ a $\sigma_m = n_m/h$, dostaneme rovnici rovnováhy v napětích, nazývanou **Laplaceova rovnice**.

$$\frac{\sigma_t}{r_t} + \frac{\sigma_m}{r_m} = \frac{p}{h} \quad (1.30)$$

Pomocí Laplaceovy rovnice a rovnice rovnováhy v axiálním směru sestavené pro konkrétní případ lze popsat napjatost libovolné bezmomentové skořepiny. Radiální posuv u bezmomentové skořepiny pak nejčastěji vyjadřujeme přímo z geometrické rovnice pro ε_r , dosazením za ε_r z konstitutivních vztahů:

$$u = \frac{r(z)}{E} (\sigma_t - \mu \sigma_m), \quad (1.31)$$

kde $r(z)$ je složka poloměru r_t kolmá k ose skořepiny.

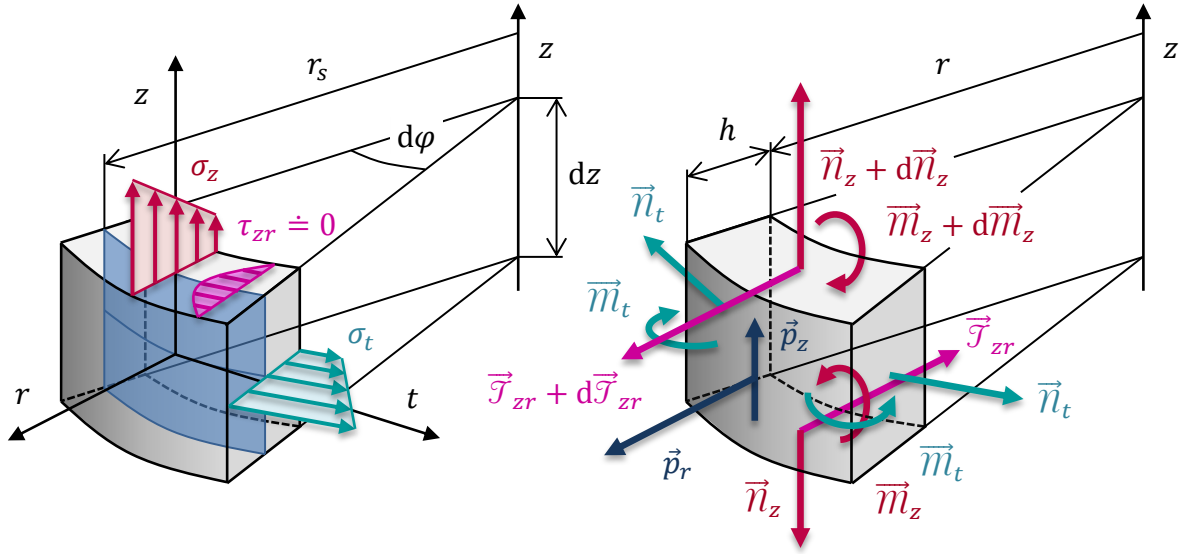
1.3.4 Válcová momentová skořepina

Momentová skořepina co do geometrie odpovídá dutému, válcovému tělesu, jehož tloušťka stěny $h \ll r_s$ (poloměr střednicové plochy). Na obrázku 1.7 vidíme uvolněný prvek momentové skořepiny, vlevo pomocí napětí a vpravo pomocí staticky ekvivalentních liniových sil a momentů. Prvek je dvojnásobně elementární, což je důsledkem předpokladu tenkostěnnosti. Z uvolněného prvku získáme celkem tři rovnice rovnováhy. Rovnici (1.32) v axiálním směru, rovnici (1.33) v tečném směru a rovnici (1.34) ve směru radiálním.

$$\frac{dn_z}{dz} + p_z = 0 \quad (1.32)$$

$$\frac{d\mathcal{J}_{zr}}{dz} - \frac{n_t}{r} + p_r = 0 \quad (1.33)$$

$$\frac{dm_z}{dz} - \mathcal{J}_{zr} = 0 \quad (1.34)$$



Obr. 1.7: Dvojnásobně elementární prvek momentové skořepiny [4].

Liniové síly a momenty jsou s napětím svázány obdobně jako u desky přes podmínky statické ekvivalence. Nezávislými deformačními parametry jsou radiální posuv u a axiální posuv w . V závislosti na těchto posuvech vyjádříme geometrické rovnice.

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r} \quad \varepsilon_z = \frac{dw}{dz} - x \frac{d^2u}{dz^2} \quad (1.35)$$

Dosazením z geometrických rovnic do konstitutivních vztahů a následnou integrací získáme pro momenty m_z a m_t rovnice

$$m_z = -B \frac{d^2u}{dz^2}, \quad (1.36)$$

$$m_t = -\mu B \frac{d^2u}{dz^2} = \mu m_z, \quad (1.37)$$

kde B je ohybová tuhost skořepiny, definovaná vztahem

$$B = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}. \quad (1.38)$$

Obdobným způsobem vyjádříme následující vztahy pro normálové síly n_z a n_t .

$$n_z = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\frac{dw}{dz} + \mu \frac{u}{r} \right) \quad (1.39)$$

$$n_t = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\frac{u}{r} + \mu \frac{dw}{dz} \right) \quad (1.40)$$

Sílu n_z však obvykle určíme přímo z rovnice rovnováhy (1.32) v axiálním směru.

$$n_z = - \int p_z(z) dz + C_0. \quad (1.41)$$

Integrační konstantu C_0 hledáme pro určitou známou hodnotu síly n_z .

Vyloučením posouvající síly \mathcal{F}_{zr} z rovnic rovnováhy (1.33) a (1.34), dosazením za liniové síly a momenty a následnou úpravou dostaneme nehomogenní diferenciální rovnici 4. řádu s konstantními koeficienty v posuvech u .

$$\frac{d^4 u}{dz^4} + 4\beta^4 u = \frac{1}{B} \left[p_r - \frac{\mu}{r} n_z \right] \quad (1.42)$$

Konstanta β , zvaná *součinitel útlumu*, je dána vztahem

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{r^2 h^2}}. \quad (1.43)$$

O diferenciální rovnici s konstantními koeficienty se jedná pouze za předpokladu, že tloušťka skořepiny h a s ní spojená ohybová tuhost skořepiny B jsou konstantní. V takovém případě lze řešení najít v uzavřeném tvaru

$$u = e^{-\beta z} (C_1 \sin \beta z + C_2 \cos \beta z) + e^{\beta z} (C_3 \sin \beta z + C_4 \cos \beta z) + u_p, \quad (1.44)$$

kde u_p je partikulární řešení posuvu, dané rovnicí

$$u_p = \frac{r^2}{Eh} \left[p_r - \frac{\mu}{r} \left(C_0 - \int p_z(z) dz \right) \right] = \frac{r^2}{Eh} \left[p_r - \frac{\mu}{r} n_z \right]. \quad (1.45)$$

Vztah pro druhý nezávislý posuv w najdeme z geometrických rovnic a konstitutivních vztahů. Následující rovnice platí pro body náležící střednicové ploše.

$$w = \frac{1-\mu^2}{Eh} \int n_z dz - \frac{\mu}{r} \int u dz \quad (1.46)$$

Válcové momentové skořepiny, jejichž délka $l > 2l_0 \doteq (2,5 \div 6)\sqrt{rh}$ nazýváme jako *dlouhé skořepiny*. Důležitou vlastností dlouhých skořepin je, že silové účinky na jednotlivých koncích skořepiny se vzájemně neovlivňují. Z této skutečnosti plyne, že oba konce skořepiny lze řešit na sobě nezávisle. Závislosti pro radiální posuv u , natočení ϑ , moment m_z a posouvající sílu \mathcal{F}_{zr} pak přechází do tvarů

$$u = e^{-\beta z} (C_1 \sin \beta z + C_2 \cos \beta z) + u_p, \quad (1.47)$$

$$\vartheta = \frac{du}{dz} = -e^{-\beta z} \beta (C_1 \sin \beta z - C_1 \cos \beta z + C_2 \sin \beta z + C_2 \cos \beta z), \quad (1.48)$$

$$m_z = -B \frac{d^2 u}{dz^2} = 2Be^{-\beta z} \beta^2 (C_1 \cos \beta z - C_2 \sin \beta z), \quad (1.49)$$

$$\mathcal{F}_{zr} = -B \frac{d^3 u}{dz^3} = -2Be^{-\beta z} \beta^3 (C_1 \sin \beta z + C_1 \cos \beta z - C_2 \sin \beta z + C_2 \cos \beta z). \quad (1.50)$$

Napětí σ_z a σ_t , podobně jako u desky, dosahují svých maximálních hodnot po vnitřním a vnějším povrchu. Jejich velikosti lze najít pomocí vztahů

$$\sigma_{z,ex} = \frac{n_z}{h} \pm \frac{6m_z}{h^2}, \quad \sigma_{t,ex} = \frac{n_t}{h} \pm \frac{6m_t}{h^2}. \quad (1.51)$$

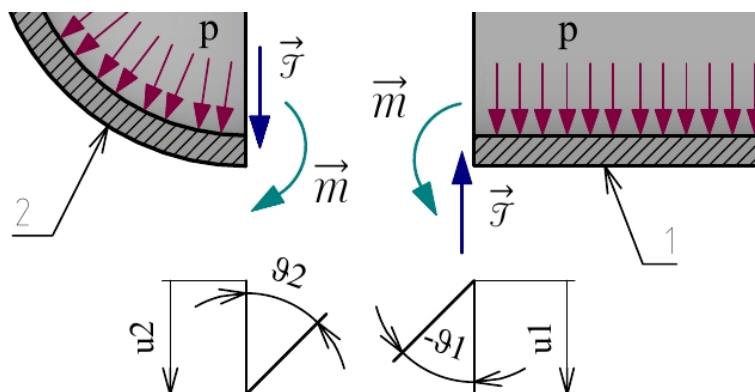
Vztahy zmíněné v této sekci budou tvořit základní výpočtový aparát pro výpočtovou část práce. Pro větší přehlednost budeme nadále rozlišovat tloušťku stěny a desky h_{SD} a tloušťku skořepiny h_{SK} . Analogicky budeme rozlišovat rovněž tuhost desky B_D a tuhost skořepiny B_{SK} a příslušné integrační konstanty.

2 Řešení složených těles

V předchozí kapitole jsme se seznámili s modelovými tělesy typu rotačně symetrická stěna, rotačně symetrická deska a dále se skořepinami, jak bezmomentovými, tak momentovými. Je patrné, že užití těchto dílčích modelů pro výpočtové modelování je omezeno jen na velmi úzký okruh reálných případů. Vzhledem ke skutečnosti, že diferenciální přístup vede na řešení v uzavřeném tvaru jen ve velmi ojedinělých případech, je zastoupení analytických metod při řešení problémů technické praxe v dnešní době mizivé.

Dominantní zastoupení mají v současnosti metody variační, konkrétně metoda konečných prvků (MKP). Pomocí MKP lze řešit konstrukčně velmi složité problémy, včetně termálních analýz, kontaktních úloh a jiných. I přesto, že variační metody byly matematicky popsány již mnohem dříve, skutečného uplatnění dosáhly až s rozvojem výpočetní techniky, MKP konkrétně v období 50. až 60. let 20. století [7].

Do doby rozmachu MKP byl značně preferován přístup diferenciální. Nutnost řešení složitějších technických problémů vedla na myšlenku propojování dílčích modelů desek a skořepin, a to na základě principu superpozice a podmínek spojitosti (stejně posuvy) a hladkosti (stejná natočení) deformace, jak je schématicky demonstrováno na obrázku 2.1. Takto vytvořené analytické modely těles jsou volně nazývány jako **složená tělesa**. Tomuto přístupu řešení však předcházela dlouholetý vývoj matematického popisu jednotlivých dílčích modelů.



Obr. 2.1: Uvolnění tlakové nádoby s polokulovým dnem [8].

Co se týče teorie desek, vůbec první zaznamenaný pokus o řešení průhybu pochází z 18. století. Řeč je o práci Leonarda P. Eulera, který se zabýval problematikou netlumeného kmitání pravoúhlých desek [9]. Pro řešení napjatosti tenkostěnných skořepin byl klíčový přelom 18. a 19. století. Toto období se pojí s příchodem vztahu, jehož objev je připisován francouzskému matematikovi a astronomovi Pierre-Simon Laplaceovi – v práci již zmíněná Laplaceova rovnice [10]. Tímto vztahem byl položen základní kámen pro vývoj membránové teorie skořepin. Prvenství ve vývoji momentové teorie skořepin je přisuzováno Hermannu Aronovi, který do teorie jako první zahrnul vlivy vnitřních ohybových momentů [9, 11].

Metodu řešení pomocí složených těles lze aplikovat na řadu pružnostně-pevnostních problémů, splňujících rotační symetrii geometrie, zatížení a vazeb. Zřejmě největší uplatnění našla v oblasti D-N analýz tlakových nádob. Příkladem může být publikace [12] Roberta H. Johnse a Thomase W. Orange, zabývající se problematikou různých typů dn tlakových nádob. Jako složená tělesa jsou v této publikaci řešeny rovněž nádoby složené ze skořepin různých tloušťek

stěn, kdy v oblasti spoje dochází ke vzniku ohybového momentu a tedy porušení membránové napjatosti, která je u tlakových nádob optimální. Analytické výpočty tlakových nádob jakožto složených těles lze rovněž naléznout v publikacích [13] J. F. Harveyho nebo [8] Vincenza Vulla.

Kromě tlakových nádob lze metodu složených těles uplatnit například na písty motorů, řemenice a další rotačně symetrické strojní součásti. Konkrétně D-N analýzou pístu motoru se již zabývala bakalářská práce [14].

3 Rešerše z oblasti statistiky

V rámci výpočtové části práce bude často naším cílem diskutovat rozdíly mezi řešením analytickým a řešením numerickým. Tyto rozdíly je nutné určitým způsobem kvantifikovat. Pro tyto účely nám poslouží následující statistické veličiny:

- střední absolutní chyba (MAE),
- maximální chyba (E_{\max}),
- koeficient determinace (R^2).

Výstupem numerického řešení bude zpravidla diskretní průběh zkoumané veličiny, neboli množina n bodů daných souřadnicemi $[x, y_{\text{num}}]$, kde souřadnice x reprezentuje polohu v dané zkoumané oblasti. Výstupem analytického řešení pak bude spojitý průběh daný nějakou funkční závislostí $y_{\text{an}} = f(x)$. Abychom mohli jednotlivá řešení náležitě porovnat, je třeba tento spojitý průběh diskretizovat tak, že každému uzlu $[x, y_{\text{num}}]$ přiřadíme příslušnou funkční hodnotu $y_{\text{an}}(x)$. Analytické řešení tak bude reprezentováno množinou n bodů o souřadnicích $[x, y_{\text{an}}]$.

3.1 Střední absolutní chyba

Rozdíly mezi příslušnými hodnotami y_{an} a y_{num} značíme jako **rezidua** [15]. Střední absolutní chyba MAE (z anglického „Mean Absolute Error“) pak udává průměrnou hodnotu absolutních hodnot všech reziduí [16]. Jedná se tedy o aritmetický průměr kladných rozdílů hodnot příslušných dvojic y_{an} a y_{num} , který můžeme vyjádřit vztahem

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_{\text{num},i} - y_{\text{an},i}| \quad (3.1)$$

3.2 Maximální chyba

Maximální chybu budeme značit jako E_{\max} . Její hodnota bude odpovídat maximu ze všech absolutních hodnot reziduí. Maximální chyba bude tím pádem odpovídat maximálnímu kladnému rozdílu hodnot příslušných dvojic y_{an} a y_{num} .

$$E_{\max} = \max |y_{\text{num},i} - y_{\text{an},i}| \quad (3.2)$$

3.3 Koeficient determinace

Koeficient determinace hraje velmi významnou roli v oblasti regresní analýzy, jakožto vědy zabývající se popisem dat náhodného charakteru vhodným matematickým modelem, tzv. regresní funkcí [17, 18]. Parametr R^2 zde slouží ke kvantifikaci kvality vyrovnaní zkoumaných dat sestavenou regresní funkcí. Snahou je nyní aplikovat tento parametr na námi řešený problém. Roli regresního modelu bude v našem případě hrát funkce $y_{\text{an}} = f(x)$. Budeme přitom zkoumat s jakou přesností tato funkce, jakožto výstup analytického řešení, aproximuje data $[x, y_{\text{num}}]$ získaná řešením numerickým. Hodnota koeficientu determinace je definována vztahem

$$R^2 = 1 - \frac{SSR}{TSS}, \quad (3.3)$$

kde SSR je součet čtverců reziduí a TSS celkový součet čtverců [15]. Jak již plyne z názvu, součet čtverců reziduí SSR spočteme jako

$$SSR = \sum_{i=1}^n (y_{\text{num},i} - y_{\text{an},i})^2. \quad (3.4)$$

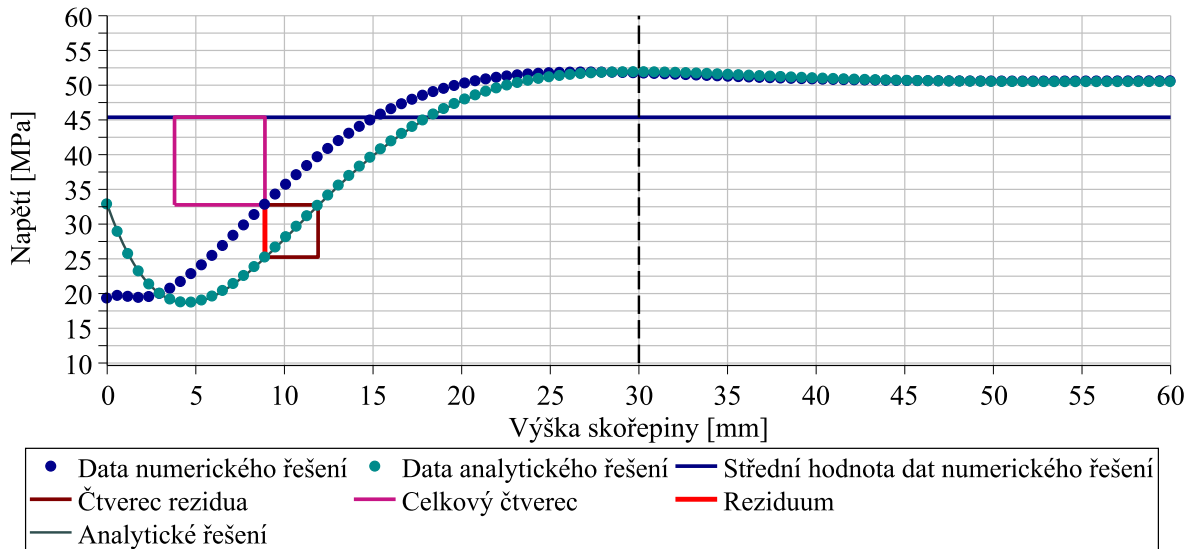
Celkový součet čtverců TSS pak představuje součet kvadrátů rozdílů funkčních hodnot $y_{\text{num},i}$ a střední hodnoty \bar{y}_{num} těchto dat, tj.

$$TSS = \sum_{i=1}^n (y_{\text{num},i} - \bar{y}_{\text{num}})^2. \quad (3.5)$$

Střední hodnota \bar{y}_{num} je přitom dána vztahem

$$\bar{y}_{\text{num}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{\text{num},i}. \quad (3.6)$$

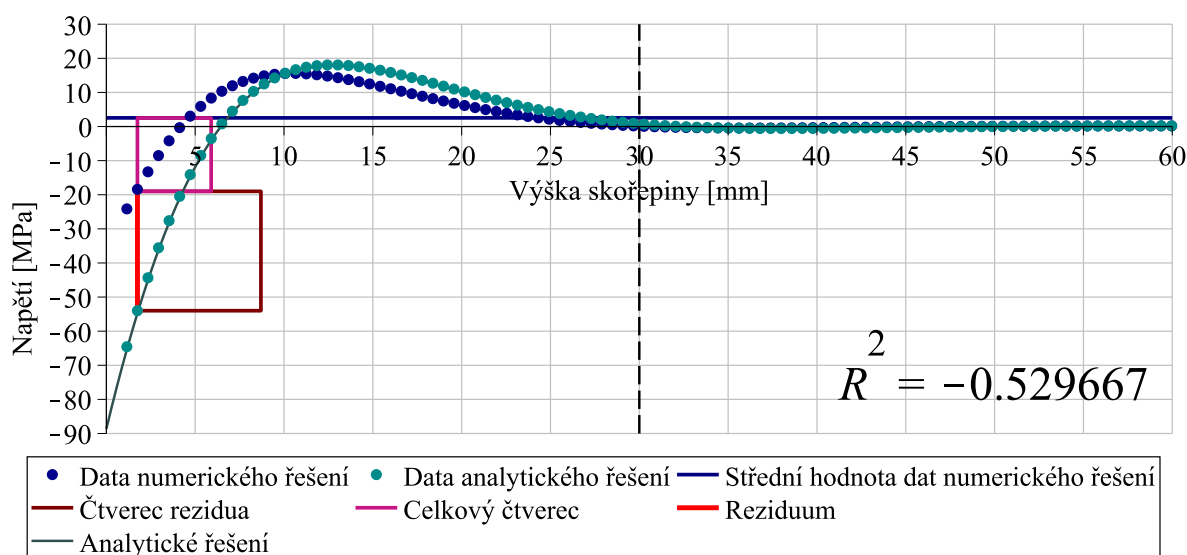
Na obrázku 3.1 můžeme vidět schématicky znázorněný čtverec rezidua a celkový čtverec pro vybranou dvojici příslušných hodnot y_{an} a y_{num} . Střední hodnota \bar{y}_{num} je zde reprezentována konstantní funkcí, rovnoběžnou s osou x . Jedná se přitom o průběhy tečného napětí podél vnitřní plochy válcové momentové skořepiny. Souřadnice obecně značená jako x zde představuje výšku skořepiny z .



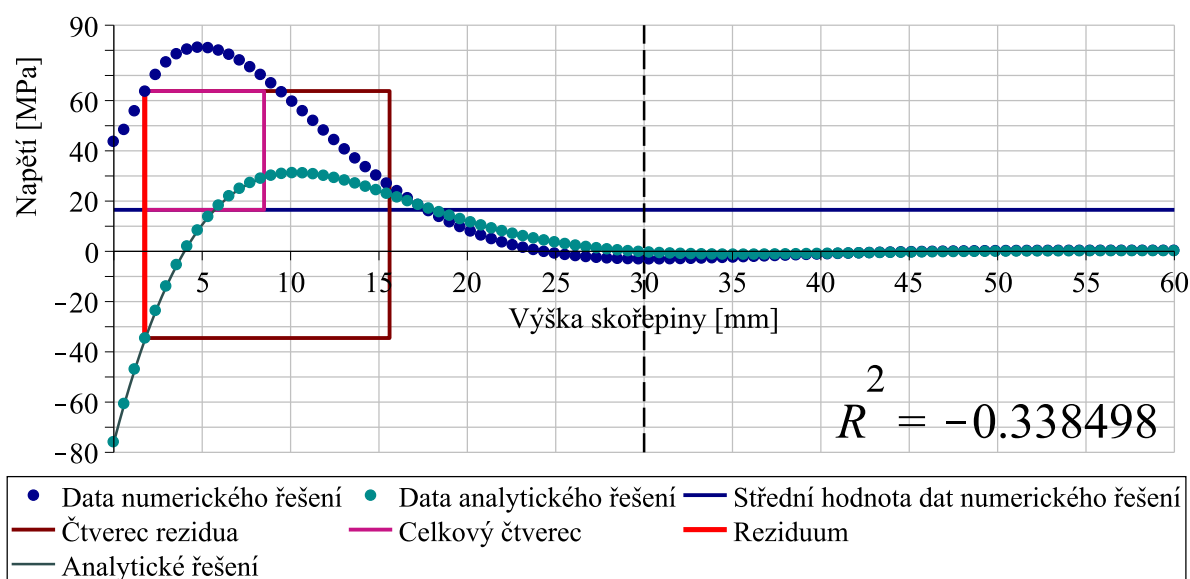
Obr. 3.1: Čtverce reziduí a totální čtverce.

Koeficient determinace nabývá hodnot $R^2 \in \langle 0, 1 \rangle$ tak, že čím je hodnota R^2 bližší 1, tím lépe analytické řešení aproximuje data získaná řešením numerickým. Hodnota $R^2 = 1$ tím pádem znamená 100% shodu mezi analytickým a numerickým řešením. Tato skutečnost plyne již z definičního vztahu (3.3). Zde můžeme vidět, že R^2 bude rovno 1 pouze pokud budou hodnoty všech reziduí nulové, což, jak lze vidět z obrázku 3.1, skutečně nastane pouze v případě, kdy jsou zkoumané průběhy totožné. Mnohem zajímavější je však druhá z mezních hodnot. Pohlédneme-li opět na definiční vztah (3.3), vidíme, že $R^2 = 0$ pouze pokud je součet čtverců reziduí SSR roven celkovému součtu čtverců TSS . V takovém případě lze prohlásit, že průběh analytického řešení aproximuje průběh numerického řešení se stejnou přesností jako konstantní průběh střední hodnoty \bar{y}_{num} .

Navzdory intervalu hodnot, kterých má koeficient determinace dle obecných definic nabývat, mohou v praxi nastat případy, kdy obdržíme hodnoty záporné. Při výpočtech byly takovéto jevy pozorovány zejména v následujících případech.



Obr. 3.2: Prudký nárůst funkčních hodnot analytického řešení.

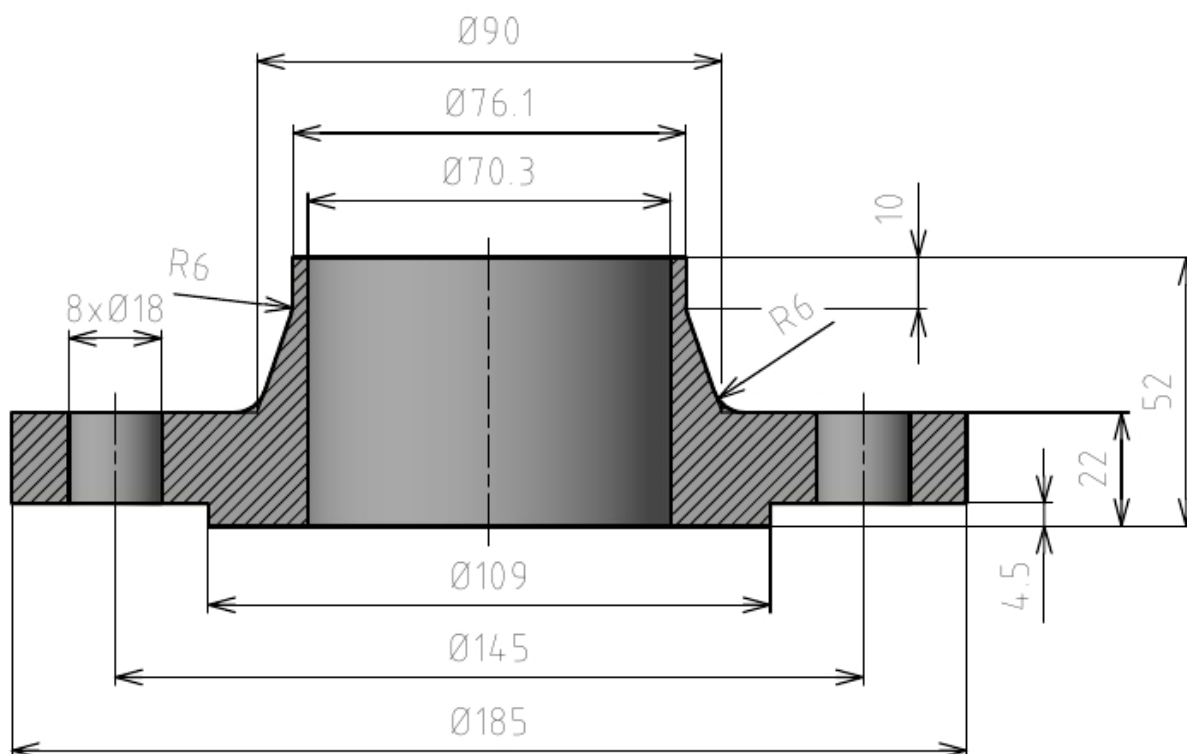


Obr. 3.3: Odchýlení průběhů analytického a numerického řešení.

V prvním případě, patrném z obrázku 3.2, byla získána záporná hodnota R^2 v důsledku prudkého odchýlení funkčních hodnot analytického řešení od průběhu numerického řešení. V případě druhém, viz obrázek 3.3, pak v důsledku rozbíhavosti vyšetřovaných průběhů. Průběhu numerických dat pak s větší přesností odpovídá konstantní funkce střední hodnoty těchto dat, než průběh získaný analytickým řešením. Popis kvality vyrovnání numerického řešení řešením analytickým pomocí R^2 v takových případech ztrácí na významu, neboť je porušena jeho definice, a je třeba si proto vystačit pouze s hodnotami střední absolutní chyby MAE a maximální chyby E_{\max} [15].

4 Vstupy do výpočtu

Pro účely výpočetní části práce byl vybrán následující typ příruby. Jedná se o přivařovací přírubu s krkem typu 11, normalizovanou dle EN 1092-1+A1 [19]. V rámci této normy jsou příruby kategorizovány hodnotami nominálního tlaku PN („Pressure Nominal“) a nominální světlosti DN („Dimension Nominal“). Jak je řečeno v EN 1333 pro PN, a analogicky v EN ISO 6708 pro DN, jedná se o bezrozměrná čísla, která nepředstavují žádnou měřitelnou veličinu a neměla by být používána pro účely výpočtů, pokud to není výslovně uvedeno v příslušné normě [20, 21]. Nejedná se tedy přímo o hodnotu světlosti (vnitřního průměru potrubí) ani dovoleného pracovního tlaku. Těsnicí plocha je realizována v podobě nákržku – typ B. Jednotlivé charakteristické parametry jsou zjevné z obrázku 4.1 a tabulky 4.1.



Obr. 4.1: Příruba EN 1092-1/11/E/DN65x2,9/PN40/P245GH.

Jmenovitá světlost DN	DN 65
Jmenovitý tlak PN	PN 40

Tab. 4.1: Nominální světlost a tlak.

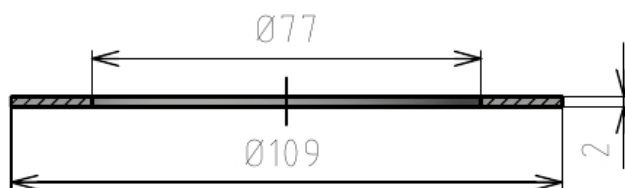
Příruba je zhotovena z oceli P245GH technologií kováním a následným opracováním. Jedná se o ocel pro tlakové nádoby se jmenovitou (minimální) mezí kluzu 245 MPa. Dle EN 1092-1+A1 tato ocel spadá do skupiny materiálu 3E0. Youngův modul pružnosti je přibližně roven 210 GPa a Poissonův poměr 0,3. Zatěžování budeme uvažovat konstantním vnitřním přetlakem p o velikosti 4 MPa, což odpovídá dle EN 1092-1+A1 hodnotě nejvyššího dovoleného tlaku PS , pro námi zvolený typ příruby, hodnotu PN, skupinu materiálu 3E0 a teplotní podmínky odpovídající referenční teplotě RT, která je definovaná jako rozsah teplot od -10°C do 50°C včetně [19].

Hodnoty sil předpětí ve šroubech jsou závislé na hodnotě požadovaného přitlačného tlaku na těsnění. V současné době se nejčastěji používají těsnění z expandovaného grafitu, popřípadě

PTFE (Polytetrafluorethylen). Jelikož se však tyto materiály vyznačují nelineární odezvou na zatížení a pojetí této problematiky by bylo nad rámec této práce, budeme pro zachování linearity úlohy v místě nákrůžku uvažovat kovový těsnicí kroužek, zhotovený z feriticko-perlitické oceli. Dle [22] je hodnota přítláčeného tlaku (dále značená jako q_0) na těsnění tohoto typu dána trojnásobkem vnitřního přetlaku p , budeme-li brát v potaz kapalně zátěžné médium.

$$q_0 = 3 \cdot p = 12 \text{ MPa} \quad (4.1)$$

Jelikož rozměry takového typu těsnění jsou v EN 1514-4 normalizovány pouze pro příruby s rovnou těsnicí lištou typu A, popřípadě s těsnicí lištou typu B (typy těsnících ploch přírub viz [19]), budeme uvažovat rozměry těsnění patrné z obrázku 4.2 [23].



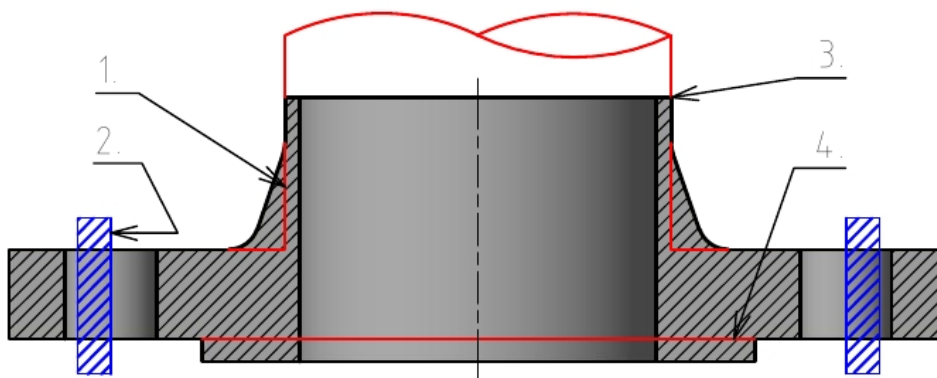
Obr. 4.2: Rozměry uvažovaného těsnění.

5 Výpočtová část

Ve výpočtové části práce budeme postupovat chronologicky od nejjednoduššího modelu příruby až po ten reálný. Analytické řešení bude vycházet převážně z teorie PP2. Přírubu budeme modelovat zprvu zvlášť jako vetknutou stěnu a vetknutou skořepinu, následně jako složené těleso. Posléze se budeme zabývat vlivy, které jsme v předchozích úvahách zanedbali. Konkrétně se zaměříme na vliv proměnné tloušťky stěny krku příruby a následně na vliv síly předpětí v místě šroubových spojů. Pro analytické výpočty bude využito programu Maple. Ve všech případech bude snahou porovnat získané výsledky s metodou konečných prvků.

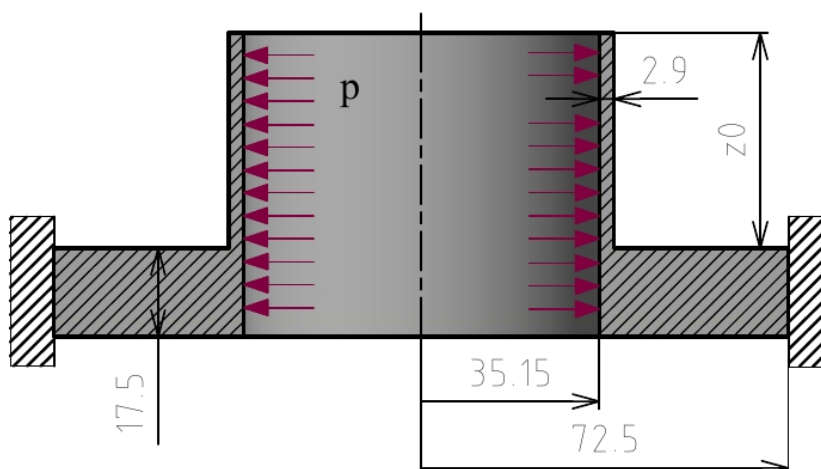
Pro účely analytického řešení je nutno přijmout určitá zjednodušení reálné geometrie příruby, viz obrázek 5.1.

1. Tloušťku stěny skořepiny budeme považovat za konstantní, neproměnnou.
2. V místě šroubových spojů budeme uvažovat vazbu typu vetknutí.
3. Nebudeme se zabývat svarovým spojem v horní části krku příruby.
4. Stykovou plochu budeme považovat za rovinnou.



Obr. 5.1: Zjednodušení geometrie.

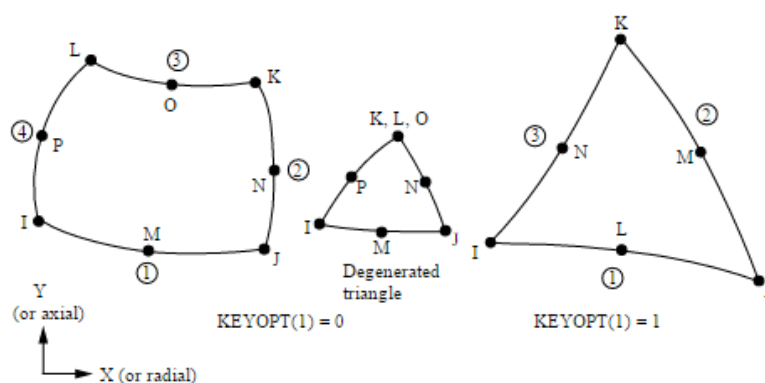
Aplikací všech výše zmíněných předpokladů pak získáme následující, zjednodušený model geometrie, odpovídajících rozměrů, viz obrázek 5.2. Jelikož v závěru práce budeme porovnávat více analytických modelů příruby, bude pro přehlednost tento model značen jako AM1.



Obr. 5.2: Analytický model příruby AM1.

5.1 MKP ve výpočtové části

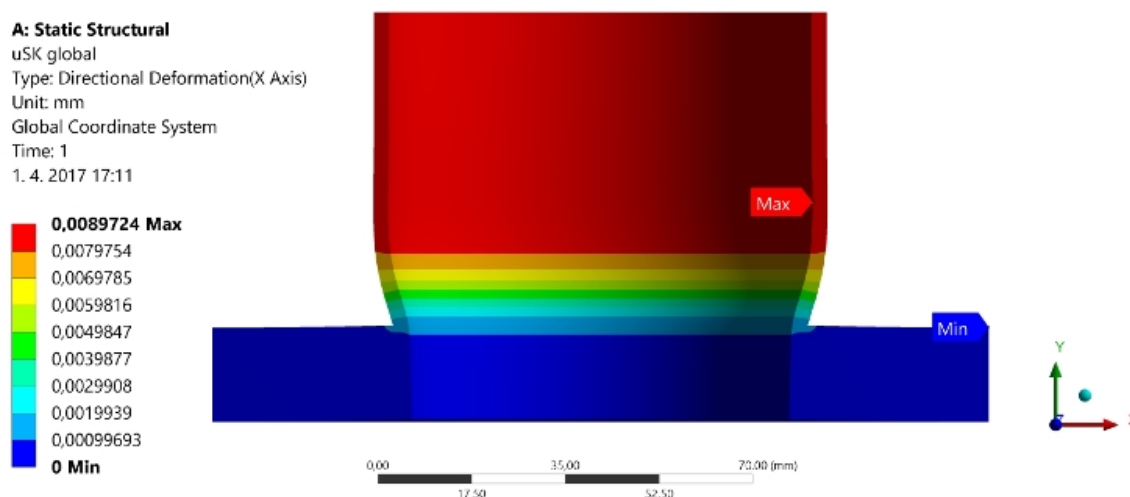
Předmětem následujících tří kapitol je modelování příruby jako vetknuté stěny, vetknuté skořepiny a složeného tělesa. Ve všech třech případech byla tělesa v prostředí Ansys Workbench modelována jako 2D axisymetrická. Vazby typu vetknutí byly modelovány aplikací okrajové podmínky „Fixed Support“ na příslušné plochy. Síť je tvořena kvadratickými prvky (elementy) typu PLANE183, které obsahují celkem 8 uzlů, včetně uzlů středových, tzv. „midside nodes“. Použitím středových uzlů je docíleno vyšší přesnosti výpočtu za použití nižšího počtu elementů.



Obr. 5.3: Prvek PLANE183 [24].

Dostatečné jemnosti síť docílíme následovně:

1. počáteční velikost prvků zvolíme na základě nejmenšího rozměru tělesa a úlohu vyřešíme,
2. následně zmenšíme velikost prvků o 50 % a pozorujeme změny výsledků,
3. předchozí krok budeme opakovat tak dlouho, dokud nebude změna mezi výsledky menší než 5 %.



Obr. 5.4: Radiální posuv složeného tělesa v MKP.

Na obrázku 5.4 můžeme vidět model složeného tělesa (AM1) s vykreslením hodnot radiálního posuvu ve směru x . Globální velikost prvků, odpovídající výše sestavenému kritériu, je 0,3 mm. Dále bylo použito funkce „Face Meshing“, pomocí které byla získána rovnoměrně rozložená (mapovaná) síť. Počet použitých elementů a uzlů je patrný z tabulky 5.1.

počet prvků	9508
počet uzlů	28517

Tab. 5.1: Počet elementů a uzlů složeného tělesa.

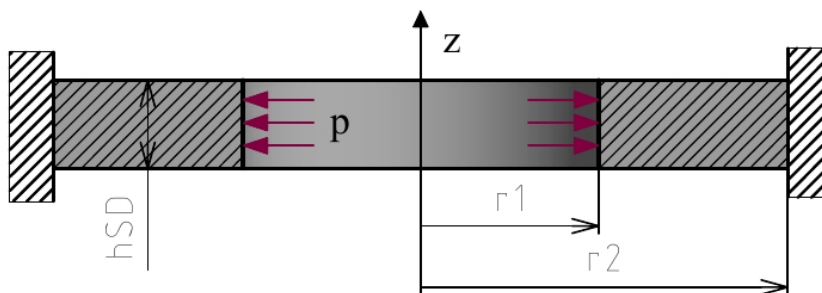
Průběhy deformačních posuvů a jednotlivých složek napětí jsou vykresleny dále v kapitole 5.4. Tyto průběhy jsou zde náležitě porovnány s řešením analytickým. Obdobným způsobem je postupováno rovněž v případě modelu vetknuté stěny a vetknuté skořepiny. Počty prvků a uzlů těchto dvou modelů vidíme v tabulce 5.2.

	počet prvků	počet uzlů
vetknutá stěna	684	2109
vetknutá skořepina	2189	6389

Tab. 5.2: Počet elementů a uzlů.

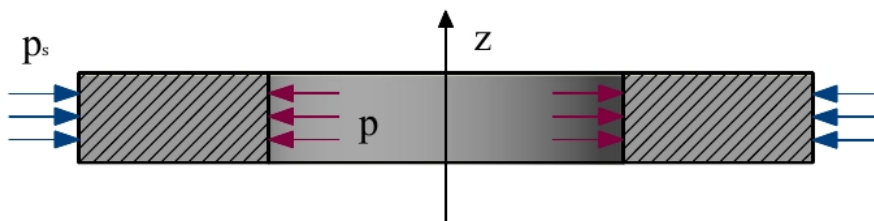
5.2 Modelování příruby jako vetknuté stěny

Již od pohledu je zjevné, že plochá část příruby se bude v porovnání s krkem příruby vyznačovat značnou tuhostí. V následujících dvou modelech tak tyto dvě části příruby separujeme a zanedbáme vzájemné silové působení ve spoji. Nyní bude předmětem našeho zájmu plochá (rovinná) část příruby. Tu budeme modelovat jako vetknutou, rotačně symetrickou stěnu, zatíženou přetlakem p na vnitřním poloměru.



Obr. 5.5: Vetknutá rotačně symetrická stěna.

Budeme vycházet z již odvozených vztahů z kapitoly 1.3.1. V našem případě se jedná o úlohu jedenkrát staticky neurčitou, neboť vazbou je omezen posuv v radiálním směru. Stěnu uvolníme a v místě vazby zavedeme stykový tlak p_s . Velikost tohoto stykového tlaku musí být přesně taková, aby byl posuv vnější válcové plochy stěny nulový. Z této skutečnosti bude vycházet použitá deformační podmínka.



Obr. 5.6: Uvolnění stěny.

Pro vyjádření integračních konstant A a B sestavíme následující okrajové podmínky:

$$r = r_1 : \quad \sigma_r = -p, \quad (5.1)$$

$$r = r_2 : \quad \sigma_r = -p_s. \quad (5.2)$$

Velikost stykového tlaku p_s pak určíme z deformační podmínky:

$$r = r_2 : \quad u = 0. \quad (5.3)$$

Dosazením okrajových podmínek získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

$$-p = A - \frac{B}{r_1^2} \quad (5.4)$$

$$-p_s = A - \frac{B}{r_2^2} \quad (5.5)$$

Řešením této soustavy dostaneme integrační konstanty A a B v závislosti na dosud neznámém stykovém tlaku p_s :

$$A = -\frac{pr_1^2 - p_sr_2^2}{r_1^2 - r_2^2}, \quad (5.6)$$

$$B = -\frac{r_1^2 r_2^2 (p - p_s)}{r_1^2 - r_2^2}. \quad (5.7)$$

Zpětným dosazením integračních konstant do rovnic (1.11), (1.12) a (1.13) vyjádříme výsledné závislosti radiálního napětí σ_r , obvodového napětí σ_t a radiálního posuvu u jako funkce poloměru r .

$$\sigma_r = -\frac{pr_1^2 - p_sr_2^2}{r_1^2 - r_2^2} + \frac{r_1^2 r_2^2 (p - p_s)}{(r_1^2 - r_2^2)r^2} \quad (5.8)$$

$$\sigma_t = -\frac{pr_1^2 - p_sr_2^2}{r_1^2 - r_2^2} - \frac{r_1^2 r_2^2 (p - p_s)}{(r_1^2 - r_2^2)r^2} \quad (5.9)$$

$$u = \frac{(1 - \mu)(pr_1^2 - p_sr_2^2)r}{E(r_1^2 - r_2^2)} - \frac{(1 + \mu)r_1^2 r_2^2 (p - p_s)}{E(r_1^2 - r_2^2)r} \quad (5.10)$$

Dosazením z deformační podmínky (5.3) do rovnice (5.10) a následným vyčíslením obdržíme hledanou hodnotu stykového tlaku p_s .

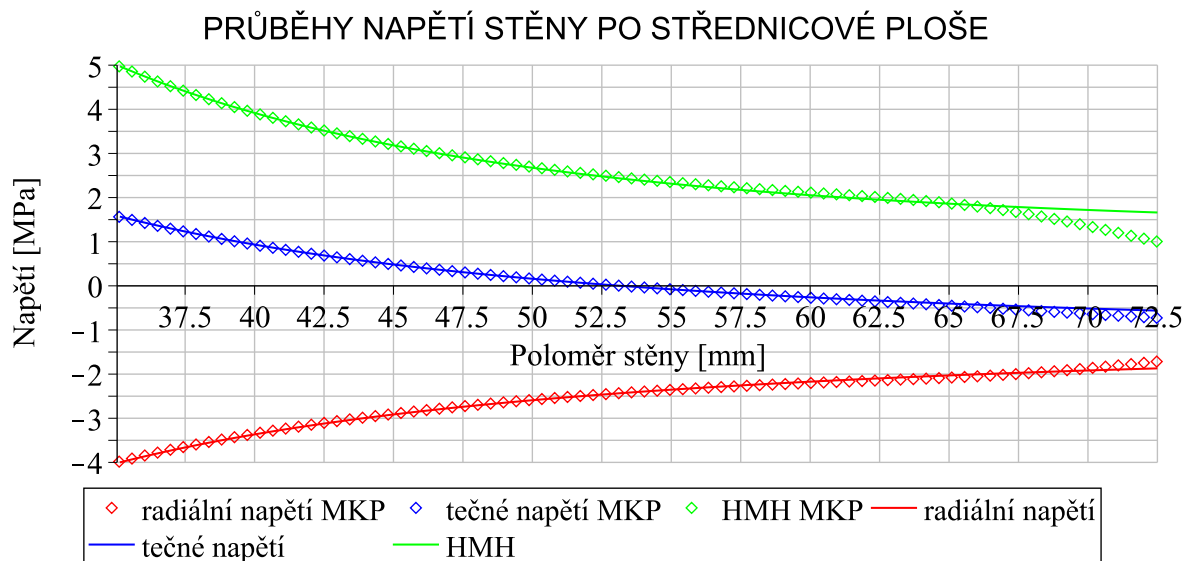
$$0 = \frac{(1 - \mu)(pr_1^2 - p_sr_2^2)r_2}{E(r_1^2 - r_2^2)} - \frac{(1 + \mu)r_1^2 r_2^2 (p - p_s)}{E(r_1^2 - r_2^2)r_2} \quad (5.11)$$

$$p_s = 1,9 \text{ MPa} \quad (5.12)$$

Pro zhodnocení napjatosti je nutné vyjádřit rovněž napětí redukované. Dle podmínky HMH pro obecnou rovinnou napjatost je σ_{red} dáno rovnicí

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_t^2 - \sigma_r \sigma_t}. \quad (5.13)$$

Na obrázku 5.7 můžeme vidět průběhy napětí v závislosti na poloměru r . V případě numerického řešení byly tyto průběhy vykresleny po střednicové ploše.



Obr. 5.7: Průběhy napětí σ_r a σ_t .

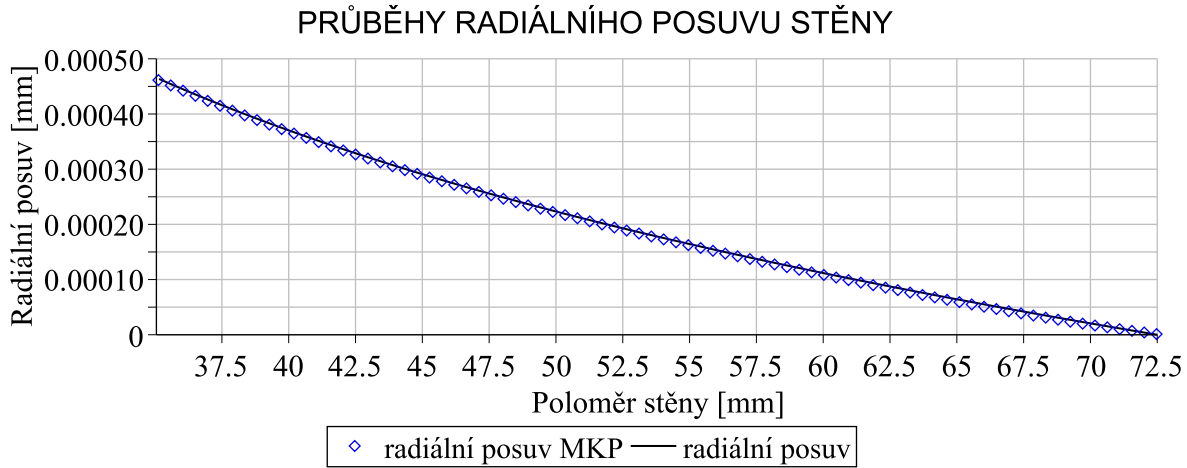
	MAE [MPa]	E_{\max} [MPa]	R^2 [-]
radiální napětí σ_r	0,02	0,18	0,99
tečné napětí σ_t	0,06	0,11	0,99
redukované napětí σ_{red}	0,07	0,67	0,97

Tab. 5.3: Zhodnocení průběhů napětí vetknuté stěny.

Z průběhů analytického řešení můžeme vidět, že hodnoty radiálního napětí σ_r v místech $r = r_1$ a $r = r_2$ odpovídají zvoleným okrajovým podmínkám. Z hlediska bezpečnosti vůči mezínímu stavu pružnosti je přitom nejkritičtější místem vnitřní plocha stěny, neboť zde dosahuje redukované napětí své maximální hodnoty.

Průběhy napětí získané numerickým řešením signalizují správnost analytického řešení. Průběh redukovaného napětí získaný analytickým řešením aproximuje numerické řešení s velmi vysokou přesností, což plyne z hodnoty koeficientu determinace 0,97. Z jednotlivých průběhů vidíme, že k největším odchylkám mezi analytickým a numerickým řešením dochází v určitém okolí vazby. Maximální chybu přitom pozorujeme přímo v místě vetknutí, kde se příslušné hodnoty redukovaného napětí liší téměř o 0,70 MPa. Příčina těchto odchylek spočívá v charakteru vazby. Jak již bylo zmíněno v kapitole 1.3, stěna je během zatěžování podrobena trojosému stavu deformace. V rámci numerického řešení byla na vnější válcovou plochu stěny aplikována okrajová podmínka typu „Fixed Support“, zamezující deformačním posuvům ve všech třech směrech, tedy i posuvům v axiálním směru. V důsledku toho dochází v okolí vazby k lokálnímu porušení konstantních průběhů napětí po tloušťce. Pokud se však podíváme na řešení analytické, vidíme, že zavedená deformační podmínka zamezuje pouze posuvu radiálnímu. Přítomný axiální posuv však tato teorie nikterak nezohledňuje. V důsledku této skutečnosti získáváme analytickým řešením stejné průběhy napětí nezávisle na vrstvě (myšlena libovolná plocha rovnoběžná se střednicovou plochou), po které tyto průběhy vykreslujeme. Jinak řečeno, průběhy napětí jsou v případě analytického řešení po tloušťce stěny konstantní ve všech místech, tak, jak lze vidět na obrázku 1.4 uvolněného dvojnásobně elementárního prvku.

Na obrázku 5.8 můžeme dále vidět průběhy radiálního posuvu u . V $r = r_2$ je posuv nulový, což odpovídá použité deformační podmínce. Z tabulky 5.4 vidíme, že vzniklé chyby se pohybují v řádech nanometrů. Hodnota koeficientu determinace pak značí, že analytické řešení aproximuje řešení numerické s téměř 100% přesností.



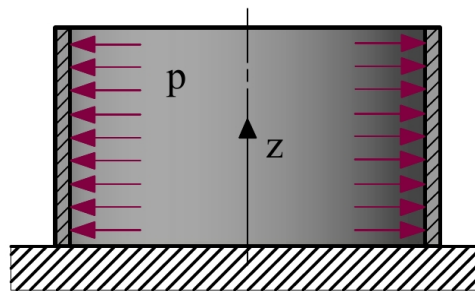
Obr. 5.8: Průběh radiálního posuvu u .

	MAE [mm]	E_{\max} [mm]	R^2 [-]
radiální posuv u	$4,05 \cdot 10^{-6}$	$5,47 \cdot 10^{-6}$	0,99

Tab. 5.4: Zhodnocení průběhů radiálního posuvu stěny.

5.3 Modelování příruby jako vetknuté skořepiny

Nyní se zaměříme na krk příruby. Zde uplatníme model momentové skořepiny, kterou budeme v místě spoje s rovinou částí příruby považovat za vetknutou do nedeformovatelného základu. Tato úvaha se tím více blíží skutečnosti, čím je tuhost rovinné části vyšší, oproti tuhosti vyšetřovaného krku.



Obr. 5.9: Vetknutá momentová skořepina.

Při řešení budeme vycházet ze vztahů odvozených v kapitole 1.3.4. V našem případě se jedná o dlouhou momentovou skořepinu. V axiálním směru nepůsobí žádný tlak p_z , proto axiální normálová síla $n_z = 0$. V důsledku toho bude mít partikulární řešení u_p tvar

$$u_p = \frac{r^2}{Eh_{SK}} \left[p_r + \frac{\mu}{r} n_z \right] = \frac{p_r r^2}{Eh_{SK}}, \quad (5.14)$$

kde poloměr r je roven poloměru střednicové plochy skořepiny r_S a radiální tlak p_r odpovídá uvažovanému vnitřnímu přetlaku p . Obecné řešení v posuvech tedy budeme hledat ve tvaru

$$u = e^{-\beta z}(C_1 \sin \beta z + C_2 \cos \beta z) + \frac{pr_S^2}{Eh_{SK}}. \quad (5.15)$$

Integrační konstanty C_1 a C_2 vyjádříme pomocí deformačních podmínek, které zajistí, že natočení a radiální posuv v místě vetknutí budou nulové:

$$z = 0 : \quad u = 0, \quad (5.16)$$

$$\vartheta = 0. \quad (5.17)$$

Obdobně jako v případě vetknuté stěny řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

$$0 = e^0(C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0) + \frac{pr_S^2}{Eh_{SK}} \quad (5.18)$$

$$0 = -\beta e^0(C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 - C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) \quad (5.19)$$

Řešením této soustavy získáme integrační konstanty C_1 a C_2 v následujícím tvaru.

$$C_1 = C_2 = -\frac{pr_S^2}{Eh_{SK}} \quad (5.20)$$

Dosazením integračních konstant do rovnic (5.15), (1.48), (1.49) a (1.37) pak obdržíme výsledné závislosti pro radiální posuv $u(z)$, natočení $\vartheta(z)$ a momenty $m_z(z)$ a $m_t(z)$.

$$u(z) = -e^{-\beta z} \frac{pr_S^2}{Eh_{SK}} (\sin \beta z + \cos \beta z) + \frac{pr_S^2}{Eh_{SK}} \quad (5.21)$$

$$\vartheta(z) = \beta e^{-\beta z} \frac{pr_S^2}{Eh_{SK}} (\sin \beta z + \cos \beta z - \cos \beta z + \sin \beta z) \quad (5.22)$$

$$m_z(z) = -2B\beta^2 e^{-\beta z} \frac{pr_S^2}{Eh_{SK}} (\cos \beta z - \sin \beta z) \quad (5.23)$$

$$m_t(z) = -\mu 2B\beta^2 e^{-\beta z} \frac{pr_S^2}{Eh_{SK}} (\cos \beta z - \sin \beta z) \quad (5.24)$$

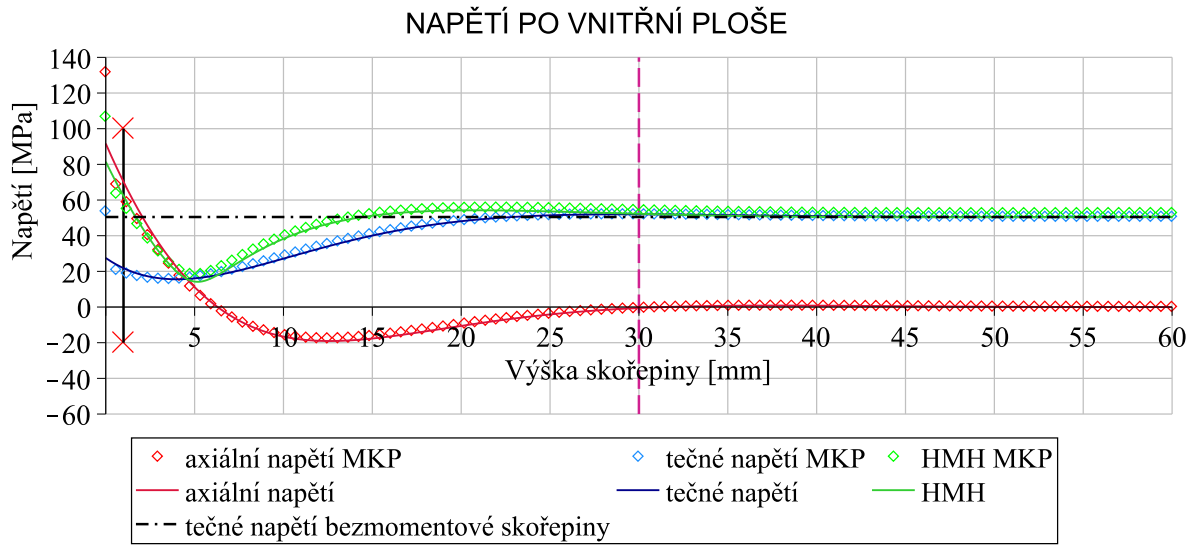
Pro stanovení průběhů napětí σ_z a σ_t nám nyní zbývá určit tečnou normálovou sílu n_t . Ta bude v našem případě dána vztahem

$$n_t = \frac{Eh_{SK}u}{r_S} = pr_S \left[1 - e^{-\beta z} (\sin \beta z + \cos \beta z) \right]. \quad (5.25)$$

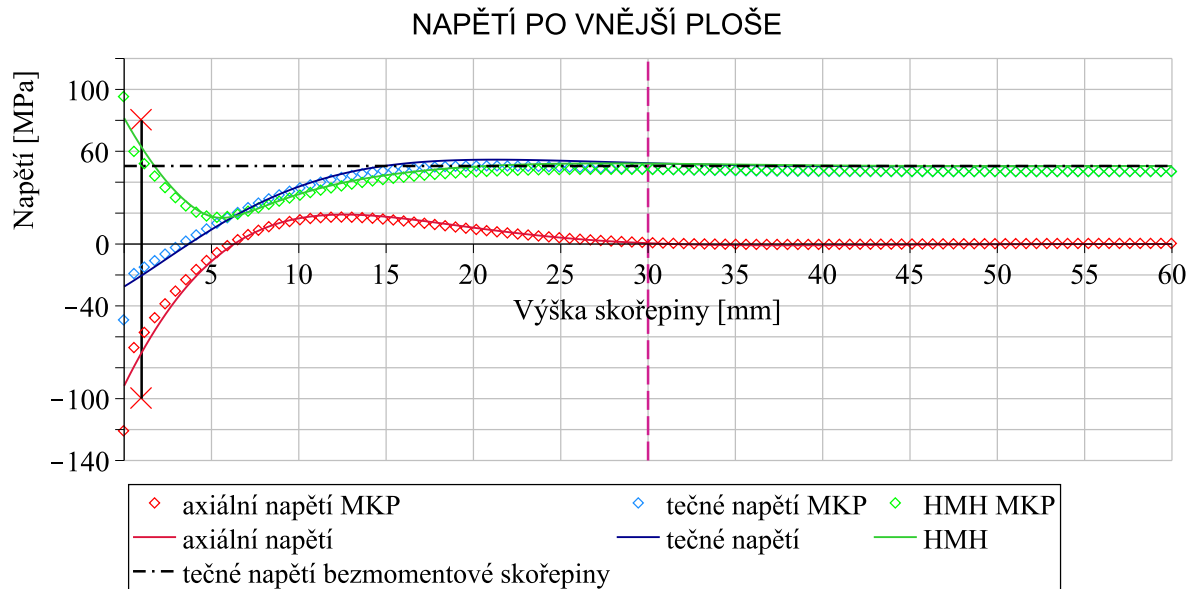
Jak plyne ze vztahů (1.51), napětí σ_z a σ_t nabývají maximálních hodnot po vnější a vnitřní ploše skořepiny, tedy v poloze $\pm h_{SK}/2$ vůči ploše střednicové. Lepší představu o napjatosti získáme výpočtem redukovaného napětí. To vyjádříme z podmínky HMM pro případ obecné rovinné napjatosti z rovnice

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma_z^2 + \sigma_t^2 - \sigma_z \sigma_t}. \quad (5.26)$$

Průběhy napětí po vnitřní ploše vidíme na obrázku 5.10, průběhy napětí po vnější ploše pak na obrázku 5.11. Získané průběhy jsou porovnány s řešením získaným pomocí MKP.



Obr. 5.10: Průběhy napětí po vnitřní ploše.



Obr. 5.11: Průběhy napětí po vnější ploše.

Z průběhů napětí lze konstatovat, že analytické řešení bylo provedeno správně. Fialová čárkovaná čára značí místo svarového spoje, tedy přechod mezi krkem příruby a trubicí. První věc, které si můžeme povšimnout je, že v dostatečné vzdálenosti od vazby dochází k ustálení jednotlivých průběhů. Napjatost v těchto místech již není nikterak ovlivněna silovým působením ve vetknutí a závisí pouze na hodnotě vnitřního přetlaku p . Stejně hodnoty napětí bychom zde měli dostat uplatněním bezmomentové teorie. Vyjdeme ze vztahů uvedených v kapitole 1.3.3. V našem případě bude poloměr r_t roven poloměru střednicové plochy r_s . Meridiánovou křivkou je přímka, proto poloměr $r_m = \infty$. Dosazením do Laplaceovy rovnice obdržíme

$$\frac{\sigma_t}{r_s} = \frac{p}{h_{SK}}. \quad (5.27)$$

Sestavením rovnice rovnováhy v axiálním směru bychom zjistili, že síla $n_m = 0$. Meridiánové napětí σ_m , které v případě momentové teorie představuje napětí axiální, bude tím pádem rovněž

nulové. Pro tečné napětí σ_t získáme drobnou úpravou rovnice (5.27) vztah

$$\sigma_t = \frac{pr_s}{h_{SK}}. \quad (5.28)$$

V důsledku membránové napjatosti bezmomentové skořepiny nabývají získaná napětí shodných hodnot po vnitřní i vnější ploše. Shoda mezi bezmomentovou a momentovou teorií v dostatečné vzdálenosti od vazby je patrná rovněž z obrázků 5.10 a 5.11.

Zaměřme se nyní na extrémy napětí v těsné blízkosti vetknutí, získané numerickým řešením. Zejména ze závislosti tečného napětí je v těchto místech patrný velmi strmý nárůst hodnot, který se v zobrazeném diskretním průběhu projevuje silně odchýlenými maximy. Poprvé se zde setkáváme s problematikou tzv. **singularit**. Singularitami v MKP nazýváme místa, ve kterých jsou hodnoty napětí závislé na velikosti prvků, a to tak, že při postupném zjemňování sítě konvergují k nekonečnu. Tyto jevy úzce souvisí s již zmíněným Saint-Venantovým principem. Důležitý je fakt, že se vyskytují výhradně ve výpočtových modelech, v reálných případech jich však nikdy nelze dosáhnout. Z tohoto plyne závěr, že extrémní hodnoty napětí v místech singularit jsou vždy považovány za chybné a je třeba je proto vyřadit z dalších úvah a výpočtů [25].

Rozlišujeme singularity spojené s geometrií (ostré hrany) a singularity spojené s bodovými okrajovými podmínkami, popřípadě bodovým zatížením silami [25]. V tomto případě se jedná o jednoznačnou singularitu geometrie, způsobenou ostrým přechodem mezi skořepinou a základovým tělesem. Podívejme se nyní, jak se bude lišit maximální a relativní chyba, pokud tato napětí do výpočtu budeme nebo nebudeme uvažovat.

	S uvažováním singularit			Bez uvažování singularit		
	MAE [MPa]	E_{\max} [MPa]	R^2 [–]	MAE [MPa]	E_{\max} [MPa]	R^2 [–]
σ_t	0,7	26,1	0,95	0,4	2,2	0,99
σ_z	1,2	39,9	0,95	0,7	7,8	0,98
σ_{red}	2,3	25,1	0,91	2,0	4,1	0,95

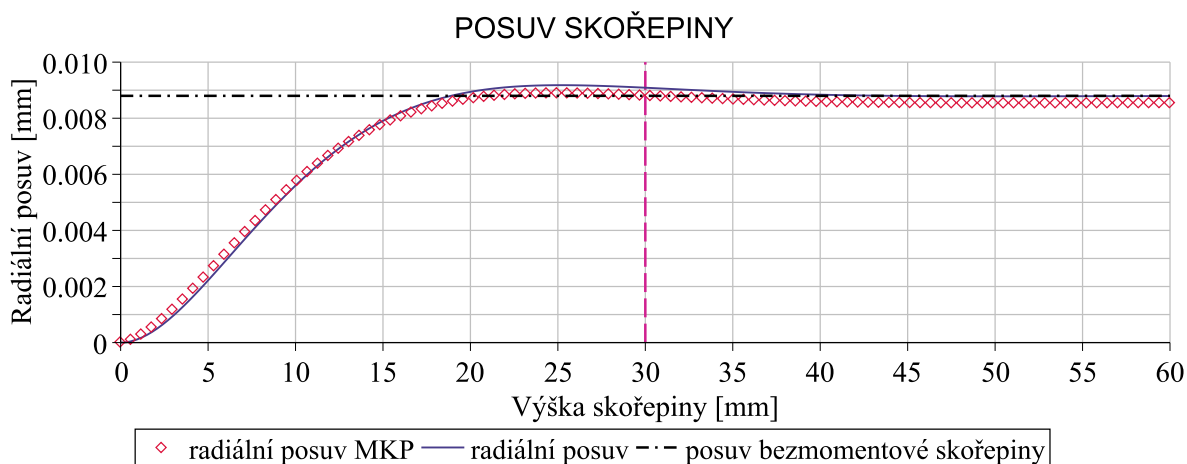
Tab. 5.5: Zhodnocení průběhů napětí po vnitřní ploše skořepiny.

	S uvažováním singularit			Bez uvažování singularit		
	MAE [MPa]	E_{\max} [MPa]	R^2 [–]	MAE [MPa]	E_{\max} [MPa]	R^2 [–]
σ_t	3,8	22,0	0,94	3,6	4,5	0,93
σ_z	1,3	29,6	0,96	0,9	8,9	0,98
σ_{red}	3,7	13,5	0,83	3,5	7,8	0,80

Tab. 5.6: Zhodnocení průběhů napětí po vnější ploše skořepiny.

Z tabulek 5.5 a 5.6 je patrné, že vyřazením singularit docílíme značného snížení hodnot maximálních a tedy i středních chyb. Tento krok však nemusí nutně vést ke zvýšení hodnot koeficientů determinace. I přesto, že v některých případech byly uvažováním singularit do výpočtu získány vyšší hodnoty koeficientu determinace nelze tyto hodnoty považovat za platné, neboť jsou zatíženy chybou fiktivních hodnot napětí.

Stejným způsobem nyní porovnáme průběhy radiálních posuvů $u(z)$, viz obrázek 5.12.



Obr. 5.12: Průběhy radiálního posuvu střednicové plochy.

V dostatečné vzdálenosti od vazby pozorujeme stejně jako v případě průběhů napětí shodu momentové teorie s teorií bezmomentovou. Pro radiální posuv bezmomentové skořepiny plyne z rovnice (1.31) vztah

$$u = \frac{pr_S^2}{Eh_{SK}}. \quad (5.29)$$

Jak si můžeme povšimnout, získaný vztah pro radiální posuv odpovídá partikulárnímu řešení z rovnice (5.15), popisující závislost radiálního posuvu momentové skořepiny.

Otázkou zůstává, do jaké míry se shodují průběhy získané analytickým a numerickým řešením. Z hodnoty R^2 z tabulky 5.7 plyne, že analytické řešení vykazuje téměř dokonalou shodu s řešením numerickým. Průběhy posuvů se přitom v průměru liší o hodnotu $2,3 \cdot 10^{-4}$ mm.

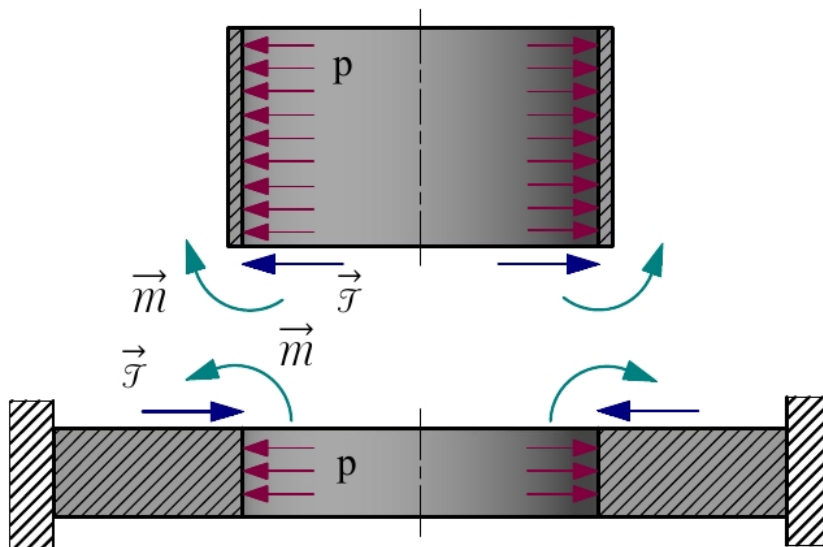
	MAE [mm]	E_{\max} [mm]	R^2 [-]
radiální posuv u	$2,30 \cdot 10^{-4}$	$2,97 \cdot 10^{-4}$	0,98

Tab. 5.7: Zhodnocení průběhů radiálního posuvu skořepiny.

5.4 Modelování příruby jako složeného tělesa

Skutečnosti se o krok přiblížíme, zohledníme-li vzájemnou interakci mezi rovinou částí a krkem příruby. Přírubu tak budeme nyní modelovat jako složené těleso. Na krk příruby aplikujeme model momentové skořepiny, rovinou část budeme modelovat jako stěno-desku, neboli kombinaci modelů stěny a desky. Tu budeme řešit zvlášť jako desku a zvlášť jako stěnu, uvažováním příslušných silových působení.

Prvním krokem řešení bude uvolnění skořepiny od stěno-desky a zavedení stykových silových působení. Konkrétně se bude jednat o liniovou sílu \mathcal{T} a liniový ohybový moment \mathcal{M} tak, jak lze vidět na obrázku 5.13. V místě uvolnění musí platit podmínky spojitosti a hladkosti deformace. Jinak řečeno, posuvy a natočení na skořepině a stěno-desce musí být v tomto místě sobě rovny. Na této skutečnosti budou založeny použité deformační podmínky, jejichž řešením získáme velikosti momentu \mathcal{M} a síly \mathcal{T} . Tyto výsledky budou klíčové pro stanovení D-N stavů dílčích těles.

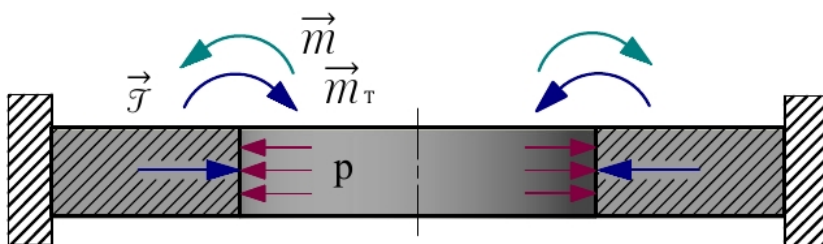


Obr. 5.13: Uvolnění skořepiny a stěno-desky.

Již od pohledu lze konstatovat, že tloušťka stěno-desky, dále značená jako h_{SD} , je v porovnání s ostatními rozměry poměrně značná. Na základě této skutečnosti lze předpokládat, že liniová styková síla \mathcal{T} bude mít v důsledku svého skutečného působíště značný vliv nejen na radiální posuv stěny, ale i na natočení dílčího modelu desky. Její působení lze tak rozdělit na dvě složky, liniovou sílu \mathcal{T} působící po střednicové ploše stěno-desky a přídatný ohybový moment m_T , jehož velikost je v závislosti na síle \mathcal{T} dána vztahem

$$m_T = \mathcal{T} \frac{h_{SD}}{2}. \quad (5.30)$$

Je patrné, že čím bude tloušťka stěno-desky h_{SD} menší, tím menší bude vliv přídatného momentu m_T . Takto uvažované zatížení stěno-desky, viz obrázek 5.14, je vzhledem k původnímu zatížení staticky ekvivalentní, již však není zanedbáván momentový účinek síly \mathcal{T} , jejíž skutečnou polohu působení teorie stěn nikterak nezohledňuje.



Obr. 5.14: Staticky ekvivalentní zatížení stěno-desky.

Deformační podmínky v místě uvolnění definujeme následujícím způsobem:

$$u_{SKOREPINY} = u_{STENY}, \quad (5.31)$$

$$\vartheta_{SKOREPINY} = -\vartheta_{DESKY}. \quad (5.32)$$

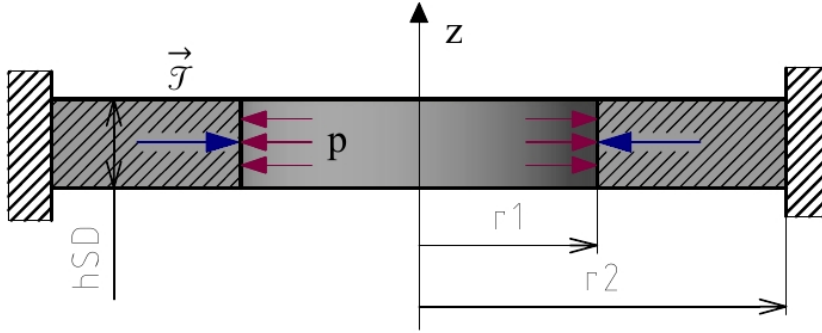
5.4.1 Řešení stěny

Nyní se budeme zabývat řešením dílčího modelu stěny. Uvažovat tak budeme pouze zatížení v radiálním směru, jak je zobrazeno na obrázku 5.15. Primárním cílem je vyjádřit posuv u_{STENY} v závislosti na síle \mathcal{T} , potřebný pro řešení deformační podmínky (5.31).

Obdobný případ vetknuté stěny jsme již řešili v sekci 5.2, proto se nyní řešením nebudeme zabývat do detailu. Jediná drobná změna se projeví v okrajové podmínce na vnitřním poloměru r_1 , do které je třeba zahrnout hledanou sílu \mathcal{T} . Opět se jedná o úlohu jedenkrát staticky neurčitou. Jelikož nás však nezajímá přímo hodnota stykového tlaku p_s ve vazbě, bude druhá z rovnic potřebných pro nalezení integračních konstant A a B vycházet přímo z deformační podmínky nulového posuvu na vnějším poloměru r_2 :

$$r = r_1 : \quad \sigma_r = \frac{\mathcal{T}}{h_{SD}} - p, \quad (5.33)$$

$$r = r_2 : \quad u = 0. \quad (5.34)$$



Obr. 5.15: Řešení dílčího modelu stěny.

Okrajové podmínky sepisujeme u stěn pro radiální napětí σ_r , proto je třeba sílu \mathcal{T} podělit tloušťkou stěno-desky h_{SD} . Obdobným postupem, jako v případě vetknuté stěny, viz podkapitola 5.2, obdržíme integrační konstanty A a B , tentokrát ve tvaru:

$$A = \frac{r_1^2(-h_{SD}\mu p + \mathcal{T}\mu - h_{SD}p + \mathcal{T})}{h_{SD}(\mu r_1^2 + \mu r_2^2 + r_1^2 + r_2^2)} \quad (5.35)$$

$$B = \frac{(-h_{SD}p + \mathcal{T})r_1^2 r_2^2(-1 + \mu)}{h_{SD}(\mu r_1^2 + \mu r_2^2 + r_1^2 + r_2^2)} \quad (5.36)$$

Hledaný posuv u_{STENY} pak odpovídá radiálnímu posuvu stěny $u(r)$ v místě $r = r_s$, kde r_s je poloměr střednicové plochy skořepiny.

$$u_{STENY} = \frac{1 - \mu}{E} A r_s + \frac{1 + \mu}{E} B \frac{1}{r_s} \quad (5.37)$$

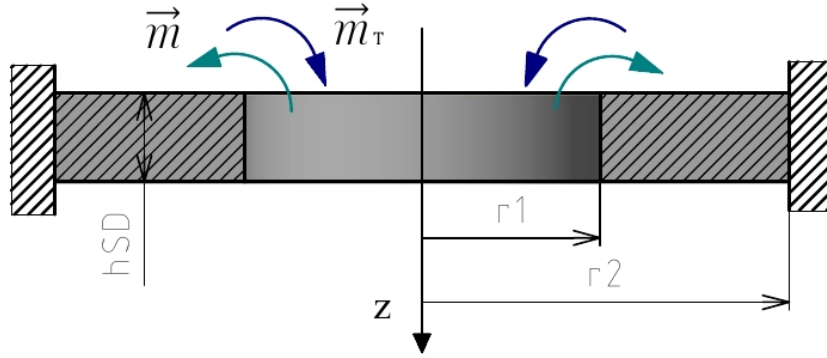
5.4.2 Řešení desky

V případě řešení desky vyjdeme ze vztahů odvozených v sekci 1.3.2. Úkolem bude vyjádřit natočení ϑ_{DESKY} jako funkci síly \mathcal{T} a momentu \mathcal{M} , figurující v deformační podmínce (5.32).

Jak vidíme na obrázku 5.16, kolmo na střednicovou plochu desky nepůsobí žádný tlak ani liniová síla. Řešení tak značně nabývá na jednoduchosti, neboť partikulární řešení natočení ϑ_p a tudíž i partikulární řešení průhybu w_p jsou nulová. Obecná řešení v natočeních a posuvech tak hledáme ve tvaru:

$$\vartheta(r) = C_{1D}r + \frac{C_{2D}}{r} \quad (5.38)$$

$$w(r) = \int \vartheta(r) dr + C_{3D} = C_{1D} \frac{r^2}{2} + C_{2D} \ln(r) + C_{3D} \quad (5.39)$$



Obr. 5.16: Řešení dílčího modelu desky.

Z rovnic (1.18) nyní vyjádříme vztahy pro momenty m_r a m_t :

$$m_r = -\frac{B_{SD}(C_{1D}\mu r^2 + C_{1D}r^2 + C_{2D}\mu - C_{2D})}{r^2} \quad (5.40)$$

$$m_t = -\frac{B_{SD}(C_{1D}\mu r^2 + C_{1D}r^2 - C_{2D}\mu + C_{2D})}{r^2} \quad (5.41)$$

Máme tři integrační konstanty, proto je třeba sestavit tři okrajové podmínky.

$$r = r_1 : \quad m_r = +m - m_T = +m - \mathcal{F} \frac{h_{SD}}{2} \quad (5.42)$$

$$r = r_2 : \quad w = 0 \quad (5.43)$$

$$\vartheta = 0 \quad (5.44)$$

Z okrajových podmínek dostaneme následující soustavu tří rovnic o třech neznámých.

$$m - \mathcal{F} \frac{h_{SD}}{2} = -\frac{B_{SD}(C_{1D}\mu r_1^2 + C_{1D}r_1^2 + C_{2D}\mu - C_{2D})}{r_1^2} \quad (5.45)$$

$$0 = C_{1D} \frac{r_2^2}{2} + C_{2D} \ln(r_2) + C_{3D} \quad (5.46)$$

$$0 = C_{1D}r_2 + \frac{C_{2D}}{r_2} \quad (5.47)$$

Řešením soustavy získáme integrační konstanty C_{1D} , C_{2D} a C_{3D} ve tvaru

$$C_{1D} = -\frac{1}{2} \frac{r_1^2(-\mathcal{F}h_{SD} + 2m)}{B_{SD}(\mu r_1^2 - \mu r_2^2 + r_1^2 + r_2^2)}, \quad (5.48)$$

$$C_{2D} = \frac{1}{2} \frac{r_1^2(-\mathcal{F}h_{SD} + 2m)r_2^2}{B_{SD}(\mu r_1^2 - \mu r_2^2 + r_1^2 + r_2^2)}, \quad (5.49)$$

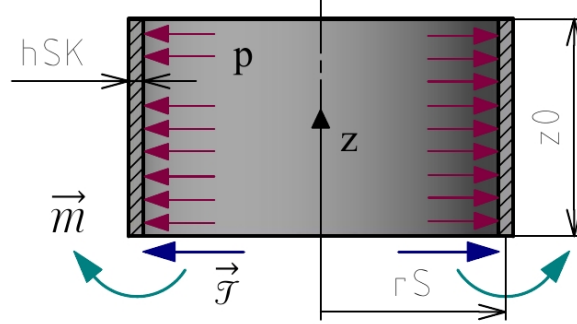
$$C_{3D} = -\frac{1}{4} \frac{r_2^2(2\ln(r_2) - 1)r_1^2(-\mathcal{F}h_{SD} + 2m)}{B_{SD}(\mu r_1^2 - \mu r_2^2 + r_1^2 + r_2^2)}. \quad (5.50)$$

Nezbývá nic jiného, než vyjádřit hledané natočení ϑ_{DESKY} z rovnice (5.38) pro $r = r_S$, analogicky jako v případě vetknuté stěny.

$$\vartheta_{\text{DESKY}} = C_{1D}r_S + \frac{C_{2D}}{r_S} \quad (5.51)$$

5.4.3 Řešení skořepiny

Pro řešení deformačních podmínek nám zbývá vyjádřit radiální posuv skořepiny $u_{\text{SKOREPINY}}$ a natočení $\vartheta_{\text{SKOREPINY}}$ v místě spoje se stěno-deskou, dle obrázku 5.17 tak v $z = 0$.



Obr. 5.17: Řešení skořepiny.

Normálová síla působící v axiálním směru $n_z = 0$, obecné řešení v posuvech bude mít tím pádem stejný tvar jako v případě vetknuté skořepiny, tj.

$$u = e^{-\beta z} (C_{1\text{SK}} \sin \beta z + C_{2\text{SK}} \cos \beta z) + \frac{pr_S^2}{Eh_{\text{SK}}}, \quad (5.52)$$

kde r_S je již známý poloměr střednicové plochy skořepiny. Pro vyjádření integračních konstant $C_{1\text{SK}}$ a $C_{2\text{SK}}$ definujeme následující silové okrajové podmínky:

$$z = 0 : \quad m_z = -m, \quad (5.53)$$

$$\mathcal{T}_{zr} = -\mathcal{T}. \quad (5.54)$$

Opět řešíme případ dlouhé skořepiny, proto okrajové podmínky dosazujeme přímo do odvozených rovnic (1.49) a (1.50) pro moment m_z a posouvající sílu \mathcal{T}_{zr} .

$$-m = 2B_{\text{SK}}e^0\beta^2(C_{1\text{SK}}\cos 0 - C_{2\text{SK}}\sin 0) \quad (5.55)$$

$$-\mathcal{T} = -2B_{\text{SK}}e^0\beta^3(C_{1\text{SK}}\sin 0 + C_{1\text{SK}}\cos 0 - C_{2\text{SK}}\sin 0 + C_{2\text{SK}}\cos 0) \quad (5.56)$$

Řešením získané soustavy dvou rovnic o dvou neznámých obdržíme integrační konstanty $C_{1\text{SK}}$ a $C_{2\text{SK}}$ ve tvaru

$$C_{1\text{SK}} = -\frac{1}{2} \frac{m}{\beta^2 B_{\text{SK}}}, \quad C_{2\text{SK}} = \frac{1}{2} \frac{m\beta + \mathcal{T}}{B_{\text{SK}}\beta^3}. \quad (5.57)$$

Zpětným dosazením integračních konstant do vztahů (5.52) a (1.48) dostaneme pro $r = r_S$ hledaný posuv $u_{\text{SKOREPINY}}$ a natočení $\vartheta_{\text{SKOREPINY}}$ v závislosti na síle \mathcal{T} a momentu m .

$$u_{\text{SKOREPINY}} = \frac{1}{2} \frac{2B_{\text{SK}}\beta^3 pr_S^2 + Em\beta h_{\text{SK}} + E\mathcal{T}h_{\text{SK}}}{B_{\text{SK}}\beta^2 Eh_{\text{SK}}} \quad (5.58)$$

$$\vartheta_{\text{SKOREPINY}} = -\frac{1}{2} \frac{2m\beta + \mathcal{T}}{\beta^2 B_{\text{SK}}} \quad (5.59)$$

5.4.4 Vyhodnocení

Máme již všechny parametry potřebné pro řešení deformačních podmínek (5.31) a (5.32). Ty tvoří soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, kterými jsou styková síla \mathcal{T} a stykový moment \mathcal{M} . Stanovením hodnot těchto silových působení budeme moci plynule přejít k řešení napjatosti a deformace dílčích těles. Hodnoty síly \mathcal{T} a momentu \mathcal{M} , při uvažovaném zatížení vnitřním přetlakem o velikosti 4 MPa jsou

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= 130,8 \text{ Nmm} \cdot \text{mm}^{-1}, \\ \mathcal{T} &= -31,2 \text{ Nmm}^{-1}.\end{aligned}$$

Odtud plyne, že přídatný moment \mathcal{M}_T dosahuje značně vysoké hodnoty, konkrétně

$$\mathcal{M}_T = -273,1 \text{ Nmm} \cdot \text{mm}^{-1}.$$

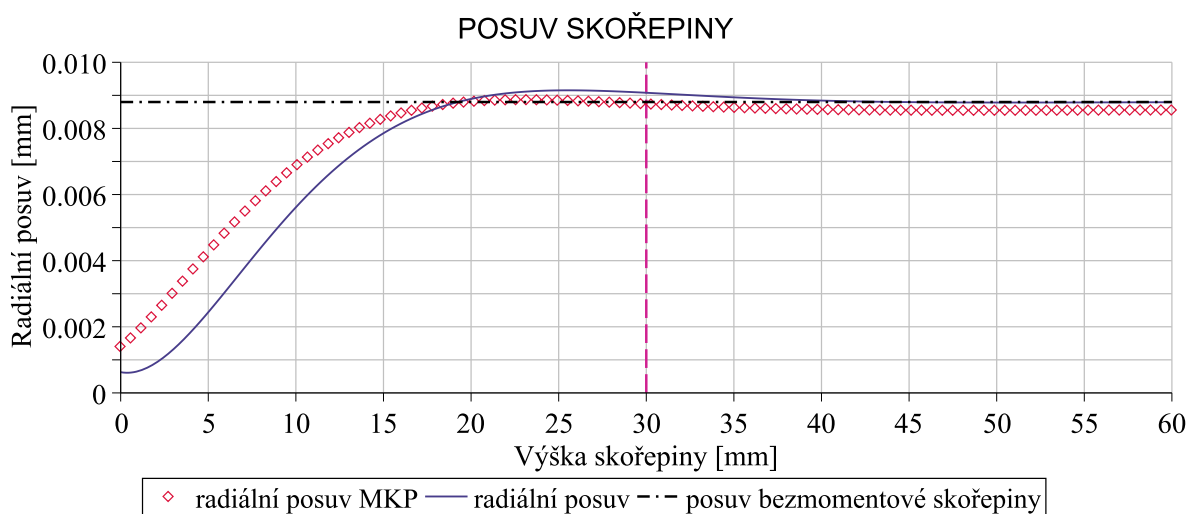
Při zanedbání momentu \mathcal{M}_T byly obdrženy následující hodnoty síly \mathcal{T} a momentu \mathcal{M} .

$$\begin{aligned}\mathcal{M}' &= 122,9 \text{ Nmm} \cdot \text{mm}^{-1}, \\ \mathcal{T}' &= -30,2 \text{ Nmm}^{-1}.\end{aligned}$$

Hodnota stykového momentu \mathcal{M} tak v důsledku zanedbání přídatného momentu \mathcal{M}_T poklesla o přibližně 6 %, hodnota stykové síly \mathcal{T} pak o 3 %. Z této skutečnosti lze konstatovat, že zohlednění přídatného momentu \mathcal{M}_T nebude mít výrazný vliv D-N stav skořepiny, v důsledku jeho vysoké hodnoty se však významně projeví na D-N stavu stěno-desky, konkrétně pak dílčího modelu desky.

5.4.5 D-N stav skořepiny

Průběh radiálního posuvu $u(z)$ střednicové plochy získáme z rovnice (5.52). Na obrázku 5.18 můžeme tento průběh vidět v porovnání s řešením pomocí MKP. Jak si můžeme všimnout, v místě spoje se stěno-deskou vykazuje MKP zhruba dvakrát větší posuv, než jaký získáme řešením analytickým. Tato odchylka může být způsobena skutečností, že analytické řešení nezohledňuje radiální posuv v důsledku působení ohybových momentů \mathcal{M} a \mathcal{M}_T , spíše se však bude jednat o přímý důsledek lokálních deformací vnitřních válcových ploch stěno-desky v okolí spoje se skořepinou, kterou analytické řešení rovněž nezohledňuje.



Obr. 5.18: Průběhy radiálního posuvu.

	MAE [mm]	E_{\max} [mm]	R^2 [-]
radiální posuv u	$5,25 \cdot 10^{-4}$	$18,11 \cdot 10^{-4}$	0,84

Tab. 5.8: Zhodnocení průběhů radiálního posuvu skořepiny.

Na základě hodnoty koeficientu determinace $R^2 = 0,84$ z tabulky 5.8 lze prohlásit, že průběh radiálního posuvu získaný analytickým řešením popisuje průběh numerického řešení s poměrně vysokou přesností.

Pro řešení napjatosti skořepiny je nejprve nutno stanovit závislosti normálové síly $n_t(z)$ a momentů $m_z(z)$ a $m_t(z)$. Závislosti momentů získáme prostým dosazením integračních konstant do rovnic (1.49) a (1.37). Pro vyjádření závislosti síly $n_t(z)$ je nejprve třeba vyjádřit ze vztahu (1.46) axiální posuv w . Jelikož síla $n_z = 0$, bude platit že

$$w = -\frac{\mu}{r} \int u dz. \quad (5.60)$$

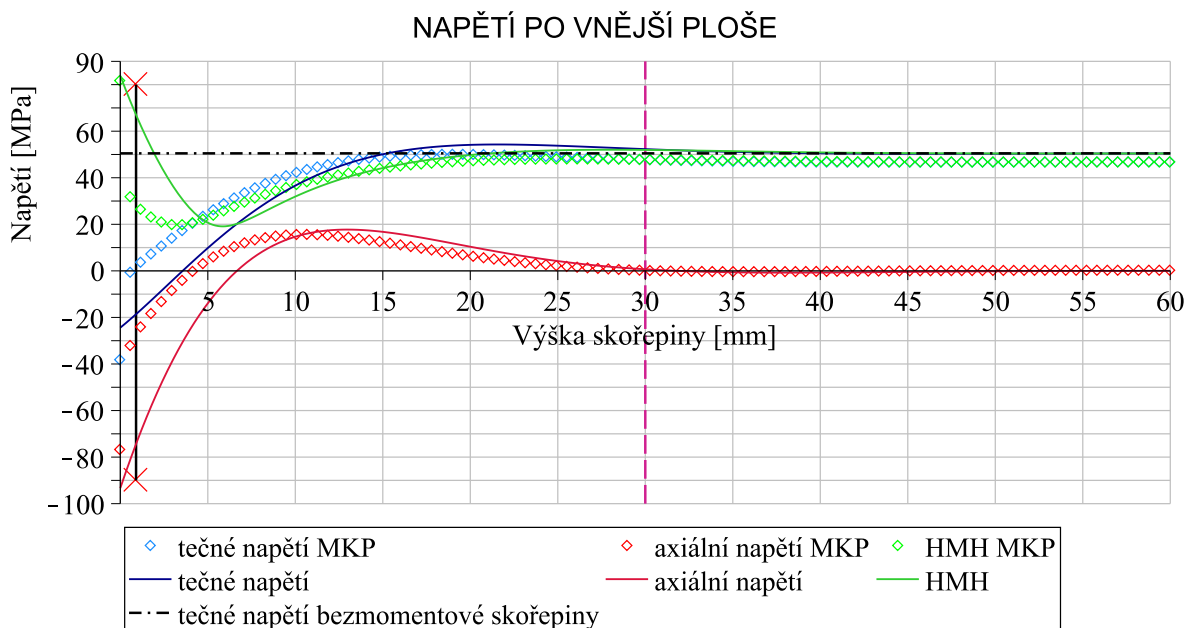
Z rovnice (1.40) pak dostaneme pro hledanou sílu n_t vztah

$$n_t = \frac{E h_{SK} u}{r_S} = \frac{E h_{SK} \left[e^{-\beta z} (C_{1SK} \sin \beta z + C_{2SK} \cos \beta z) + \frac{p r_S^2}{E h_{SK}} \right]}{r_S}. \quad (5.61)$$

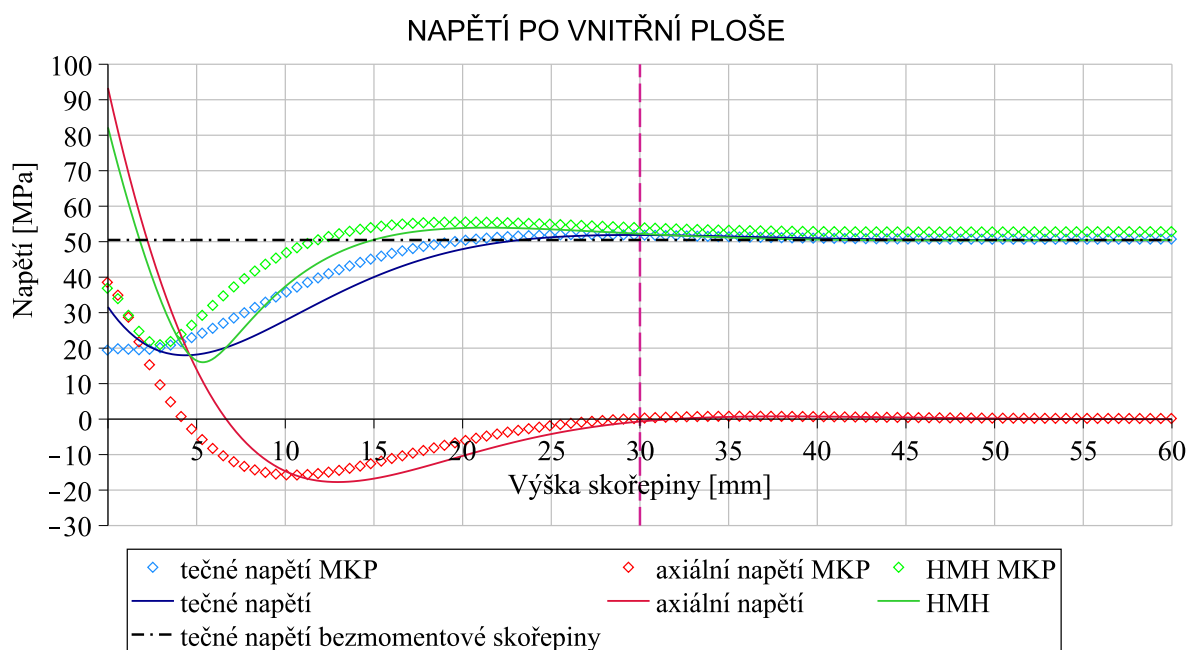
Průběhy axiálního a tečného napětí po vnější a vnitřní ploše skořepiny plynou ze vztahů (1.51). Zbývá vyjádřit napětí redukované. To je dáno z podmínky HMH pro obecnou rovinnou napjatost rovnicí

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma_z^2 + \sigma_t^2} - \sigma_z \sigma_t. \quad (5.62)$$

Průběhy napětí po vnější a vnitřní ploše skořepiny vidíme na obrázcích 5.19 a 5.20. V obou případech jsou průběhy porovnány s řešením pomocí MKP.



Obr. 5.19: Průběhy napětí po vnější ploše skořepiny.



Obr. 5.20: Průběhy napětí po vnitřní ploše skořepiny.

Z obou grafických závislostí vidíme, že průběhy analytického a numerického řešení se výrazně liší pouze v oblasti spoje se stěno-deskou. Příčiny těchto rozdílů mohou být následující. V rámci analytického řešení jsme na stykové ploše skořepiny se stěno-deskou uvažovali namísto reálně působícího napětí liniové stykové síly, působící po křivce (kružnici). Dle Saint-Venantova principu je zde v důsledku těchto operací patrný strmější nárůst hodnot analytického řešení vůči hodnotám řešení numerického. Na tomto odchýlení průběhů může mít podíl rovněž již zmíněný fakt, že zde vznikají výrazné lokální deformaci válcových řezů stěno-desky, které analytické řešení nezohledňuje.

Po vnější ploše můžeme u průběhů získaných pomocí MKP pozorovat stejně jako v případě vetknuté skořepiny singularitu geometrie, vzniklou v důsledku ostrého přechodu mezi skořepinou a stěno-deskou. Tento ostrý přechod v praxi představuje oblast nepříznivé koncentrace napětí. Účinky koncentrátorů napětí, a s nimi spojené singularity geometrie v matematických modelech, se vytrácí se zvyšujícím se poloměrem zaoblení přechodu. Vliv poloměru zaoblení na stav napjatosti je předmětem další podkapitoly výpočtové části práce.

Po vnitřní ploše modelu příruby je již mezi skořepinou a stěno-deskou hladký přechod, proto zde singulární jevy nepozorujeme. Jaké důsledky má zahrnutí singularit do výpočtu chyb bylo projednáno v kapitole 5.3. Nyní proto výpočet provedeme přímo bez uvažování těchto fiktivních extrémních hodnot napětí.

	MAE [MPa]	E_{\max} [MPa]	R^2 [-]
tečné napětí σ_t	5,4	17,0	0,50
axiální napětí σ_z	3,9	44,4	-0,87
redukované napětí σ_{red}	4,8	35,9	0,21

Tab. 5.9: Zhodnocení průběhů napětí po vnější ploše skořepiny.

	MAE [MPa]	E_{\max} [MPa]	R^2 [-]
tečné napětí σ_t	2,0	12,3	0,88
axiální napětí σ_z	4,7	54,9	-0,56
redukované napětí σ_{red}	4,8	45,5	-0,01

Tab. 5.10: Zhodnocení průběhů napětí po vnitřní ploše skořepiny.

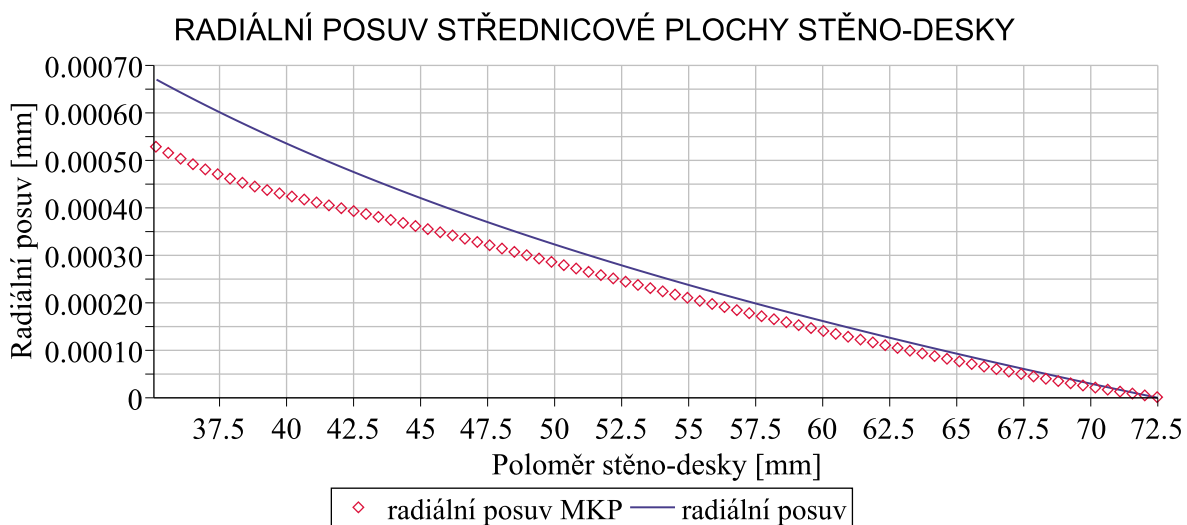
V oblasti ovlivněné stykovým silovým působením dochází k poměrně značným odchylkám analytického řešení od řešení numerického. Ačkoliv by se mohlo od pohledu zdát, že je shoda průběhů vyhovující, hodnoty koeficientů determinace signalizují opak. Soudě dle hodnot MAE a E_{\max} dochází k největším odchylkám v případě axiálního napětí a redukovaného napětí po vnější ploše. Zde je odchýlení průběhu analytického řešení natolik markantní, že dostáváme záporné hodnoty koeficientů determinace. Jedinou přijatelnou shodu lze pozorovat v případě průběhu tečného napětí po vnitřní ploše, kde $R^2 = 0,88$.

5.4.6 D-N stav stěno-desky

Nyní se zaměříme na rovinnou část příruby, která byla modelována jako tzv. stěno-deska, tedy kombinace stěny a desky. Z deformace nás bude zajímat radiální posuv u_{SD} a axiální posuv (průhyb) w_{SD} . Průběhy těchto deformačních posuvů přitom budeme zkoumat po střednicové ploše stěno-desky. Při řešení přímé úlohy pružnosti desky jsou na základě předpokladu malých deformací (ze kterého vycházejí rovněž použité geometrické rovnice) považovány radiální posuvy bodů střednicové plochy za nulové. Radiální posuvy bodů střednicové plochy stěno-desky tak v případě analytického řešení odpovídají radiálním posuvům bodů dílčího modelu stěny. Průběh radiálního posuvu u_{SD} v závislosti na poloměru r je tím pádem dán rovnicí (1.13).

$$u_{SD} = \frac{1-\mu}{E}Ar + \frac{1+\mu}{E}\frac{B}{r} \quad (5.63)$$

Průběh radiálního posuvu u_{SD} stěno-desky je v porovnání s MKP patrný z obrázků 5.21.



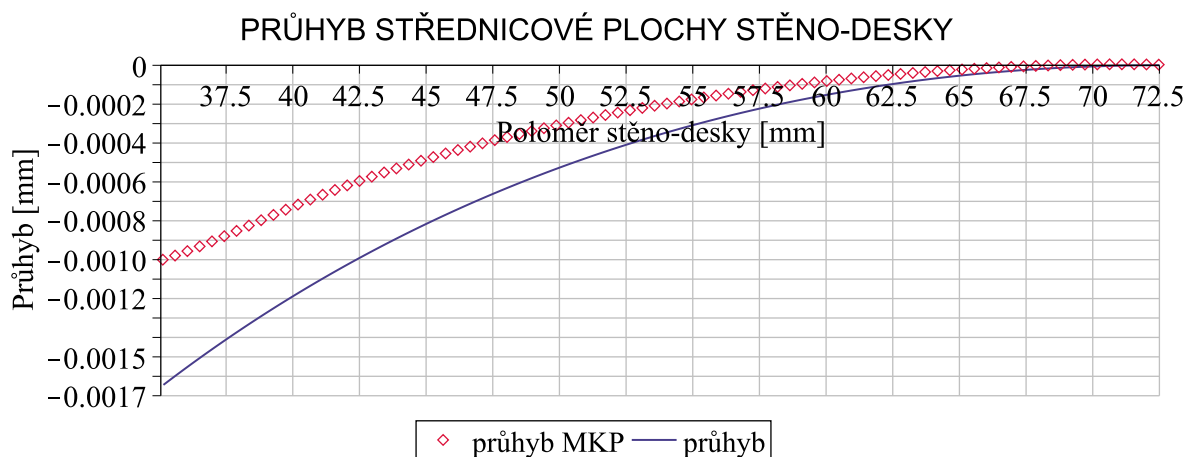
Obr. 5.21: Průběhy radiálního posuvu.

V případě průhybu je tomu naopak. Axiální posuvy střednicové plochy stěny jsou nulové, což vyplývá ze samotného charakteru tohoto modelového tělesa. Zde je na místě poznamenat,

že v případě bodů ležících mimo střednicovou plochu již axiální posuvy nulové nebudou, a to v důsledku trojosého stavu deformace stěny. Celkový průhyb w_{SD} tak odpovídá průhybu dílčího modelu desky a jeho průběh v závislosti na poloměru r je dán rovnicí (1.23) ve tvaru

$$w_{SD} = \frac{C_{1D}r^2}{2} + C_{2D} \ln r + C_{3D}. \quad (5.64)$$

Průběh průhybu w_{SD} stěno-desky je patrný z obrázků 5.22. Tento průběh je taktéž porovnán s řešením pomocí MKP.



Obr. 5.22: Průběhy průhybu.

Z vykreslených průběhů vidíme, že v poloze $r = r_2$ jsou oba deformační posuvy nulové, což odpovídá použitým okrajovým podmínkám. Průběhy analytického a numerického řešení se zde značně liší. Hlavní důvod těchto odchylek je následující. V případě analytického řešení setrvávají válcové řezy stěno-desky rovinné, dochází zde pouze k jejich natáčení (dle teorie desek) a radiálním posuvům (dle teorie stěn). Z Původních válcových řezů se tak v deformovaném stavu stávají řezy kuželové. V případě numerického řešení se však tyto řezy rovněž deformují. Deformace těchto válcových řezů jsou přitom nejmarkantnější v okolí spoje se skořepinou. Vliv stykových silových působení ve spoji se skořepinou se tak postupně vytrácí. Jak si brzy ukážeme, v případě průběhů napětí po spodní ploše stěno-desky již tento vliv není patrný.

Přejdeme nyní ke zhodnocení napjatosti stěno-desky. Průběhy jednotlivých složek napětí i napětí redukovaného zde budeme, jak je již zvykem, porovnávat s řešením numerickým. Zde je nutno si uvědomit, že MKP nikterak nerozlišuje napjatost stěny a napjatost desky tak, jak ji obdržíme z řešení analytického. Jelikož se však pohybujeme v oblasti lineární PP, můžeme pro získání celkové napjatosti stěno-desky uplatnit **větu o superpozici napjatosti a deformace**, která říká následující:

„Napjatost a deformace tělesa, zatíženého silovou soustavou, je v lineární PP rovna součtu napjatostí a deformací způsobených jednotlivými silami této soustavy. [26]“

Napjatost stěno-desky je tím pádem dána prostým součtem napjatosti vzniklé v důsledku působení ohybových momentů M a M_T (napjatost desky) a napjatosti vzniklé v důsledku působení síly \mathcal{T} a tlaku p (napjatost stěny). Jak bylo demonstrováno v kapitole 1.3.2 týkající se modelu desky, po tloušťce je patrný lineární průběh napětí. V případě stěno-desky bude tento lineární průběh v daném místě pouze navýšen o konstantní hodnotu napětí stěny. Jednotlivé průběhy napětí budeme vykreslovat po horní a spodní ploše stěno-desky, neboť zde lze předpokládat

výskyt maximálních hodnot. Z rovnic (1.11), (1.12) a (1.25) získáme pro extrém radiálního a tečného napětí stěno-desky rovnice

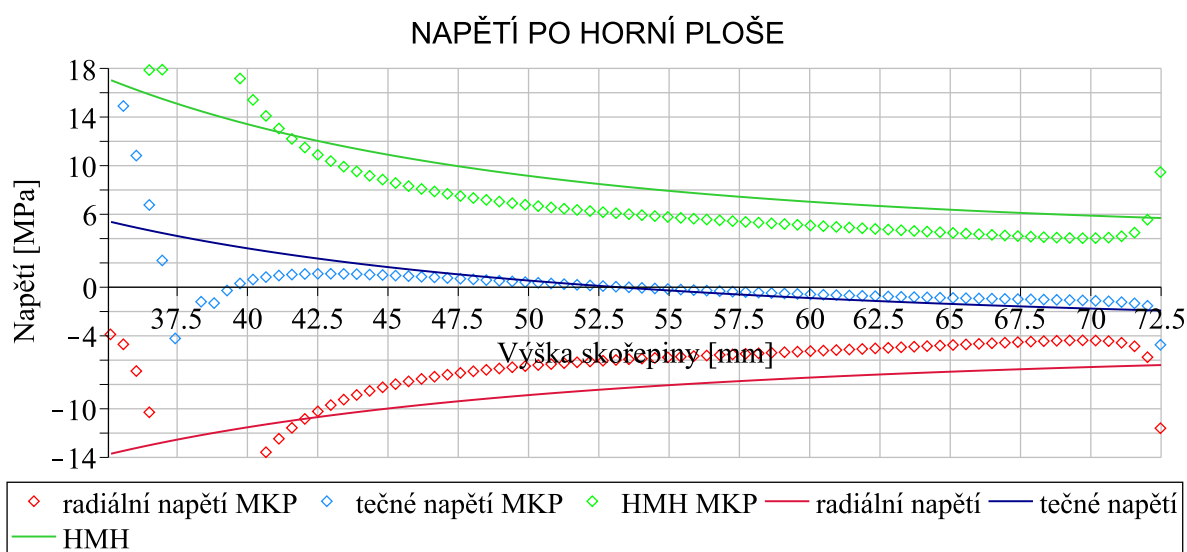
$$\sigma_{r,ex}(r) = A - \frac{B}{r^2} \pm \frac{6m_r}{h_{SD}^2}, \quad (5.65)$$

$$\sigma_{t,ex}(r) = A + \frac{B}{r^2} \pm \frac{6m_t}{h_{SD}^2}, \quad (5.66)$$

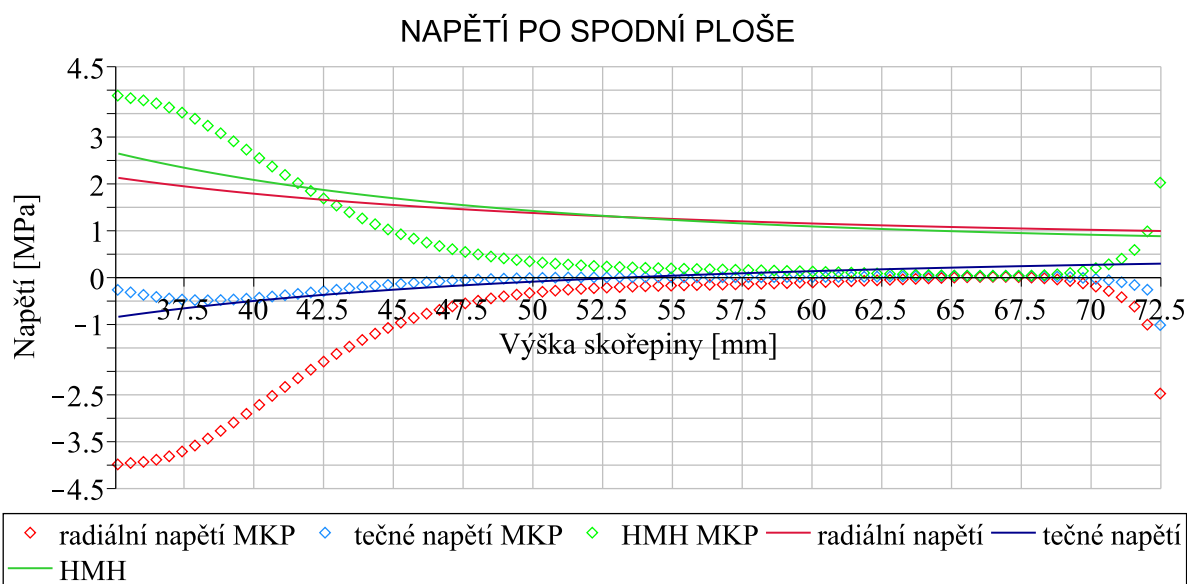
kde znaménko „+“ zde dává napětí po spodní ploše a znaménko „-“ napětí po horní ploše. Redukované napětí je dle podmínky HMH dáno vztahem

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_{r,ex}^2 + \sigma_{t,ex}^2} - \sigma_{r,ex}\sigma_{t,ex}. \quad (5.67)$$

Získané průběhy napětí můžeme vidět v porovnání s MKP na obrázcích 5.23 a 5.24.



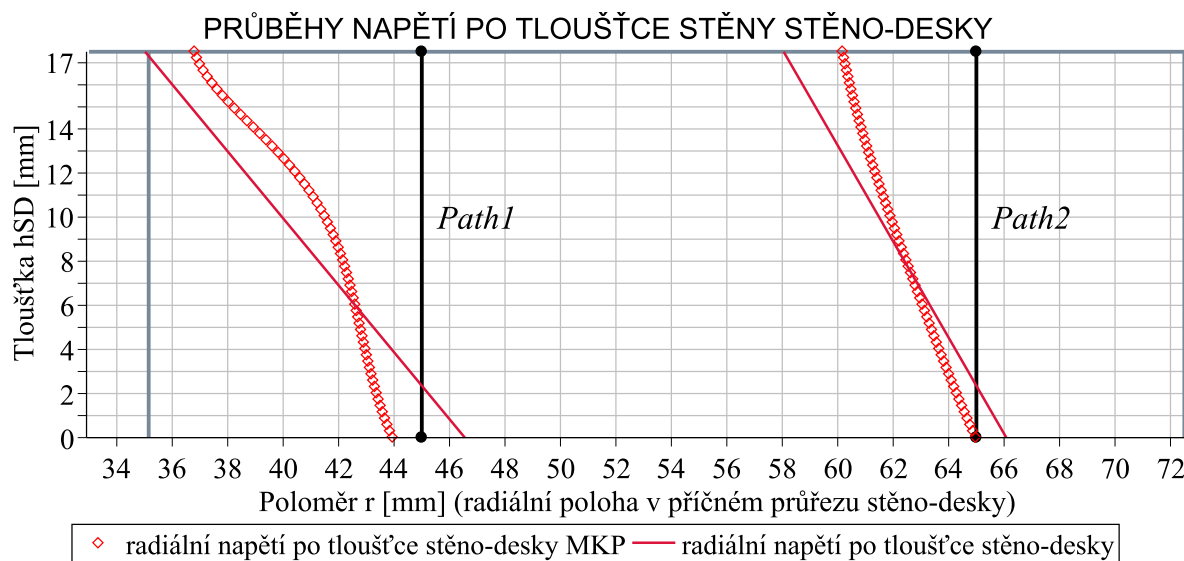
Obr. 5.23: Průběhy napětí po horní ploše stěno-desky.



Obr. 5.24: Průběhy napětí po spodní ploše stěno-desky.

Určitou shodu mezi průběhy lze pozorovat v případě tečného napětí po horní ploše, avšak pouze v dostatečné vzdálenosti od spoje s krkem příruby. V oblasti spojení dochází k prudkému nárůstu průběhů numerického řešení. V této oblasti lze rovněž, stejně jako v oblasti vetnutí, pozorovat silně odchýlené hodnoty napětí, reprezentující singularity. V případě napětí po spodní ploše stěno-desky je již shoda mezi analytickým a numerickým řešením nulová. Zatímco napjatost v případě analytického řešení je zde silně podmíněna stykovým silovým působením ve spoji se skořepinou, numerické řešení zde již v toto silové působení nikterak neovlivňuje. Vzniklá napjatost je zde v případě numerického řešení dána pouze působením vnitřního přetlaku p , což odpovídá hodnotě radiálního napětí v místě $r = r_1$. V případě analytického řešení však převažuje vliv působení momentů M a M_T a proto zde pozorujeme napjatost tahovou. Tato skutečnost je opět podmíněna tím, že v případě numerického řešení dochází ke značné deformaci válcových řezů v blízkosti spoje s krkem příruby. V důsledku toho zde můžeme po tloušťce stěno-desky pozorovat nelineární průběhy napětí, což je rovněž v rozporu s analytickým řešením.

Na obrázku 5.25 můžeme vidět průběhy radiálního napětí po tloušťce stěno-desky. Tyto průběhy byly v programu Ansys vykresleny po dvou různých cestách. První cesta („Path1“) se nachází v poloze $r = 45$ mm, tedy v blízkém okolí spoje se skořepinou, druhá cesta („Path2“) pak v poloze $r = 65$ mm, tedy v dostatečné vzdálenosti od této ovlivněné oblasti. Vykreslené průběhy mají pouze kvalitativní charakter. Vertikální křivky, představující cesty po kterých byly průběhy vykresleny, značí rovněž referenční (nulové) hodnoty napětí.

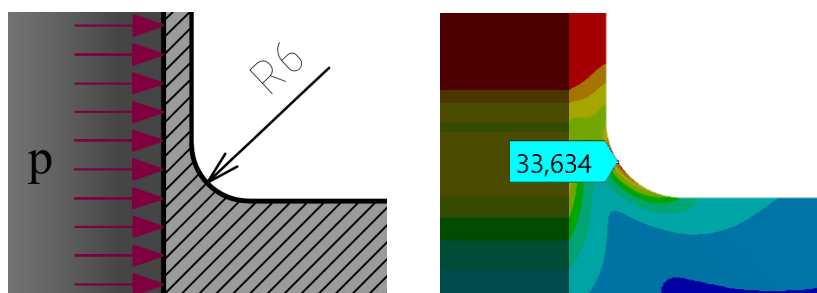


Obr. 5.25: Průběhy radiálního napětí po tloušťce stěno-desky h_{SD} .

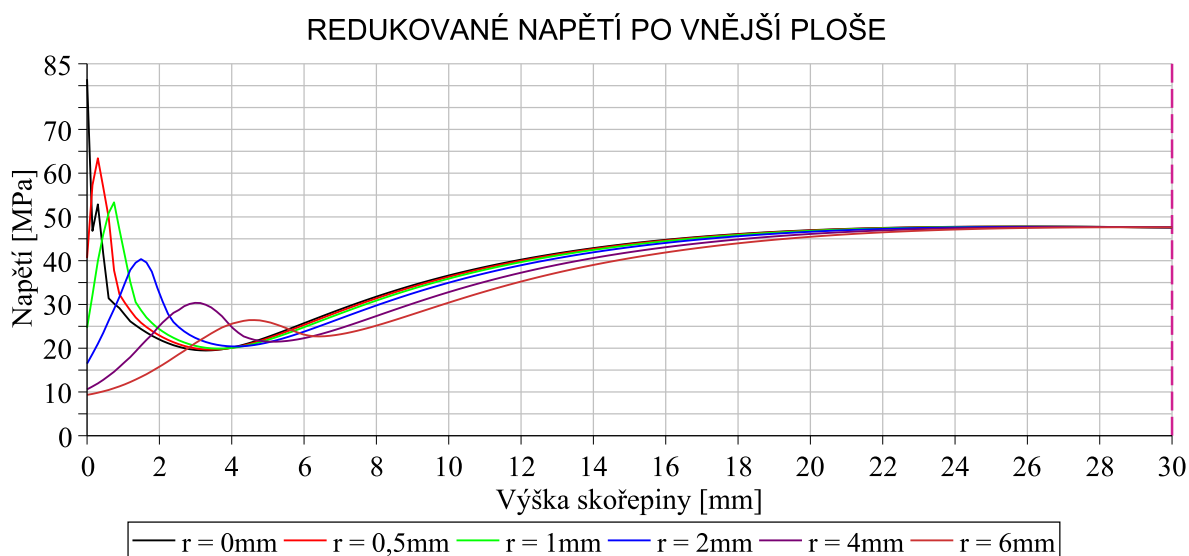
Z obrázku je patrné, že se zvyšující se vzdáleností od oblasti ovlivněné stykovým silovým působením se průběhy radiálního napětí blíží lineárním závislostem, které předpokládá analytické řešení.

5.5 Vliv poloměru zaoblení na napjatost

Jak již bylo naznačeno v předchozí podkapitole, doposud předpokládaný ostrý přechod mezi rovinnou částí a krkem příruby by byl v praxi nepřijatelný, neboť by zde docházelo ke koncentraci napětí. To je zjevné rovněž z již získaných průběhů napětí po vnější ploše krku příruby. Nyní se na oblast přechodu podíváme detailněji. Na obrázku 5.27 můžeme vidět průběhy redukovaného napětí po vnější ploše skořepiny, odpovídající různým poloměrům zaoblení r .



Obr. 5.26: Detail napjatosti zaoblení při poloměru 6 mm – HMH [MPa].



Obr. 5.27: Průběhy napětí po vnitřní ploše skořepiny.

Průběhy z obrázku 5.27 jsou zhodnoceny v tabulce 5.11. Z původní velikosti prvků 0,3 mm byla síť v oblasti přechodu postupně zjemňována až na 0,0125 mm, přitom byly pozorovány změny maximálních hodnot redukovaného napětí. Tato maxima v místě spoje, ať už globální nebo lokální, se přitom zpravidla nacházela po povrchu zaoblení.

velikost prvků	Maximum redukovaného napětí v místě zaoblení [MPa]					
	$r = 0 \text{ mm}$	$r = 0,5 \text{ mm}$	$r = 1 \text{ mm}$	$r = 2 \text{ mm}$	$r = 4 \text{ mm}$	$r = 6 \text{ mm}$
0,3 mm	81	84	65	52	38	34
0,1 mm	133	90	67	52	38	34
0,05 mm	181	91	67	52	38	34
0,025 mm	250	91	67	52	38	34
0,0125 mm	342	91	67	52	38	34

Tab. 5.11: Zhodnocení průběhů napětí po vnitřní ploše skořepiny.

Z tabulky vidíme, že v případě dokonale ostrého přechodu se skutečně potýkáme se singularitou, neboť s postupným zjemňováním sítě maximální hodnota napětí stále narůstá. Již při poloměru zaoblení o velikosti $r = 0,5 \text{ mm}$ dochází k eliminaci těchto jevů a maximum napětí postupně konverguje k hodnotě 91 MPa. Při poloměru zaoblení o velikosti 2 mm již přechod mezi stěno-deskou a skořepinou nepředstavuje z hlediska mezního stavu pružnosti kritickou oblast.

Globální maximum redukovaného napětí se přesouvá do oblasti krku příruby a nabývá velikosti 55 MPa. Při poloměru zaoblení 6 mm, který se vyskytuje v reálné geometrii námi zvolené příruby, pak dostáváme hodnotu lokálního extrému napětí pouhých 34 MPa. Nemůže tak být pochyb o tom, že poloměr zaoblení přechodu mezi rovinnou částí a krkem příruby má značný vliv na napjatost, potažmo i deformaci příruby.

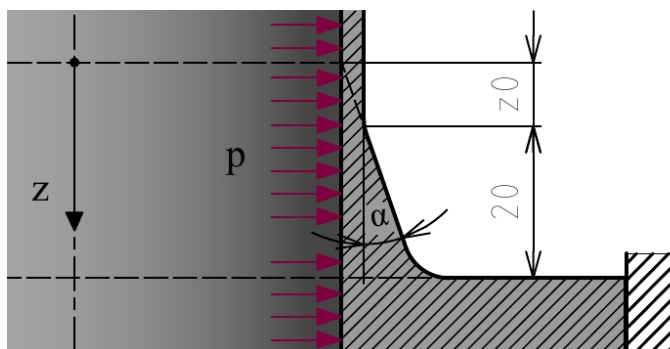
5.6 Vliv rozšiřující se tloušťky stěny na napjatost

Doposud jsme považovali tloušťku skořepiny za konstantní. Ve skutečnosti však tloušťka skořepiny směrem ke spoji se stěnodeskou lineárně narůstá, což má za následek, jak se později přesvědčíme, snížení kritických hodnot napětí. Sklon stěny skořepiny definujeme úhlem α tak, jak lze vidět na obrázku 5.28. Proměnnou tloušťku skořepiny h lze pak v závislosti na úhlu α pro $z > z_0$ vyjádřit lineární funkcí

$$h = \alpha \cdot z. \quad (5.68)$$

Tato funkce se promítne taktéž do vztahu (1.38) pro ohybovou tuhost skořepiny.

$$B = \frac{E\alpha^3}{12(1-\mu^2)}z^3. \quad (5.69)$$



Obr. 5.28: Proměnná tloušťka skořepiny.

V sekci 1.3.4 jsme se setkali s diferenciální rovnicí (1.42) momentové skořepiny s konstantní tloušťkou h . Tuto rovnici můžeme zapsat rovněž ve tvaru

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(B \frac{d^2 u}{dz^2} \right) + \frac{Eh}{r^2} u = p_r - \frac{\mu}{r} n_z. \quad (5.70)$$

Jak bylo řečeno, jedná se o nehomogenní lineární diferenciální rovnici 4. řádu s konstantními koeficienty, jejíž řešení lze vyjádřit v uzavřeném tvaru. Dosadíme-li do rovnice za h a B ze sestavených závislostí (5.68) a (5.69), dostaneme diferenciální rovnici popisující skořepinu s proměnnou tloušťkou $h(z)$. Uvážíme-li, že v našem případě bude normálová síla $n_z = 0$, pak přejde diferenciální rovnice ve tvar

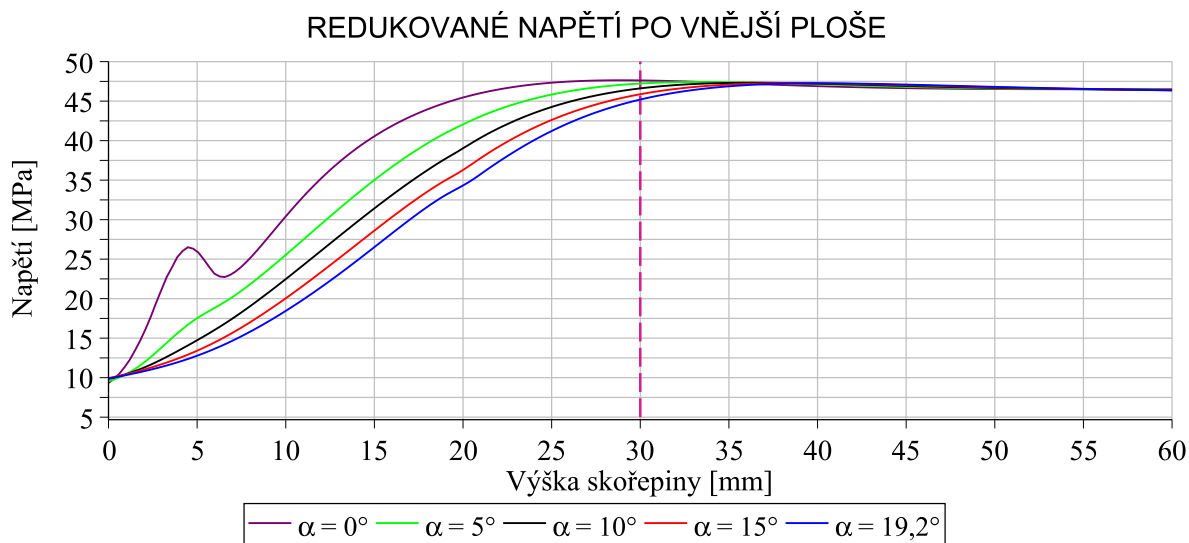
$$\frac{d^2}{dz^2} \left(z^3 \frac{d^2 u}{dz^2} \right) + \frac{12(1-\mu^2)}{\alpha^2 r^2} z u = \frac{12(1-\mu^2)p_r}{E\alpha^3}. \quad (5.71)$$

Z původní diferenciální rovnice s konstantními koeficienty dostáváme nehomogenní lineární diferenciální rovnici 4. řádu s proměnnými koeficienty. Řešení této rovnice již bohužel není

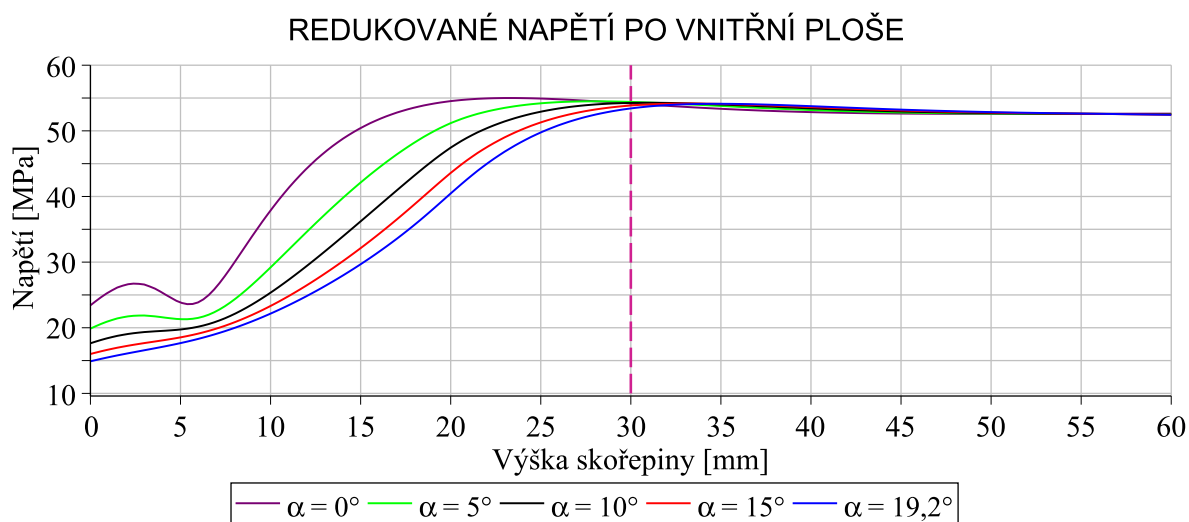
možné najít v uzavřeném tvaru. Možné řešení, které představil v roce 1908 německý inženýr, matematik a fyzik Hans Jacob Reissner, lze dohledat v [27]. Toto řešení je však natolik složité, že se v této kapitole omezíme pouze na metodu konečných prvků.

V prostředí Ansys Workbench budeme úlohu opět řešit jako 2D axisymetrickou. Model bude tvořen prvky typu PLANE183, se kterými jsme se již seznámili v první podkapitole výpočtové části. Kritériu 5% odchylky vyhovují prvky o velikosti 0,3 mm.

Na obrázcích 5.29 a 5.30 můžeme vidět průběhy redukovaného napětí dle podmínky HMH („Equivalent (von Mises)“) po vnější a vnitřní ploše skořepiny, a to pro různé úhly zkosení α . Reálné geometrii přitom přibližně odpovídá úhel $\alpha = 19,2^\circ$.



Obr. 5.29: Průběhy redukovaného napětí po vnější ploše.

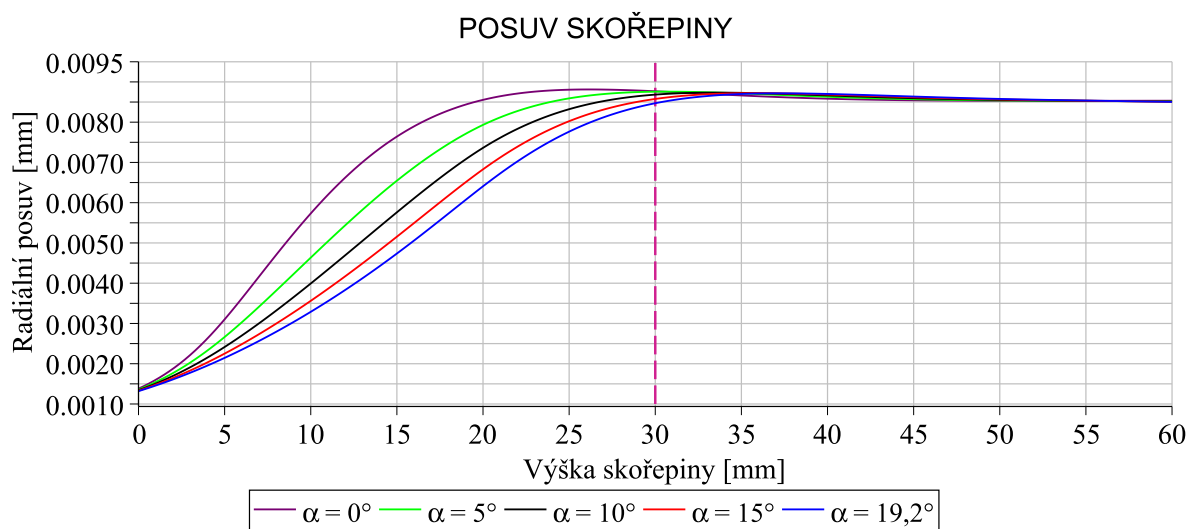


Obr. 5.30: Průběhy redukovaného napětí po vnitřní ploše.

Přechod mezi rovinnou částí a krkem příruby je již opatřen zaoblením o poloměru 6 mm. S průběhem pro $\alpha = 0^\circ$ po vnější ploše jsme se proto již setkali v předchozí podkapitole. Z průběhů můžeme pozorovat, že se zvyšujícím se úhlem α dochází k čím dál pozvolnějšímu růstu hodnot napětí směrem ke spoji s trubicí. Ohybový moment působící na krk příruby v důsledku deformace trubky zde směrem ke spoji s rovinnou částí přenáší průřez o čím dál větší ploše, což

se přirozeně projeví snížením hodnot napětí.

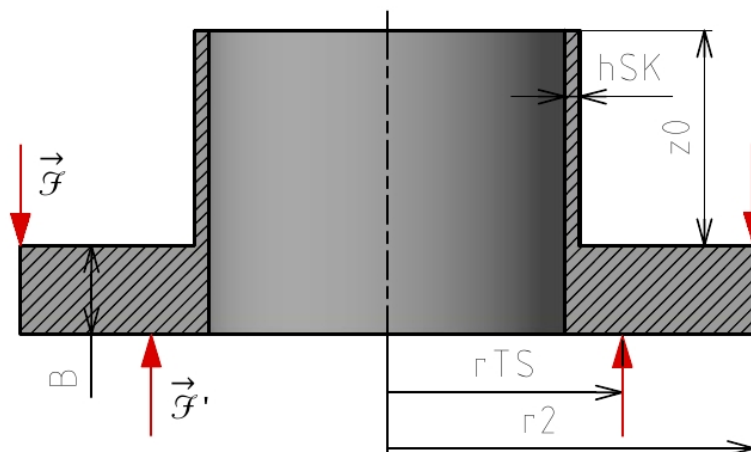
Vykreslením průběhů radiálního posuvu, viz obrázek 5.31, dospějeme k obdobným výsledkům, jako u napětí. Opět je zde možno vidět, že narůstající tloušťka stěny krku příruby má za následek zmírnění strmosti průběhů, což má pozitivní vliv zejména na maximální hodnoty axiálního napětí.



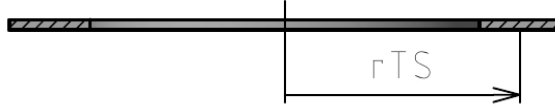
Obr. 5.31: Průběhy radiálního posuvu.

5.7 Vliv síly předpětí ve šroubovém spoji

V dosavadních úvahách jsme v místě šroubového spoje uvažovali vazbu typu vetknutí. Tato představa však nikterak nezohledňuje síly od šroubů, které jsou zpravidla utaženy s určitým předpětím. Síly předpětí, působící v tomto místě mají za následek vznik přídavného ohybového momentu, působícího na rovinnou část příruby. Nyní se podíváme na to, jaký má přítomnost tohoto momentu vliv na napjatost krku příruby. Vycházet budeme z řešení popsaného v [13] a [28]. Uvažovat budeme montážní stav, jinak řečeno nebudeme do výpočtů zahrnovat zatížení vnitřním přetlakem p . Řešený model příruby, značený pro přehlednost jako AM2 (v pořadí druhý model příruby jakožto složeného tělesa), je patrný z obrázku 5.32.



Obr. 5.32: Analytický model příruby AM2.

Obr. 5.33: Střední poloměr těsnění r_{ts} .

Situaci vidíme na obrázku 5.32. Liniová síla \mathcal{F} reprezentuje účinek působení sil předpětí F_i vyvolaných jednotlivými šrouby. Jelikož náš typ příruby obsahuje celkem osm šroubů, platí mezi silami \mathcal{F} a F_i vztah

$$F_i = \frac{1}{8} \mathcal{F} (2\pi r_2) = \frac{1}{4} \mathcal{F} \pi r_2 \quad (5.72)$$

V důsledku působení síly \mathcal{F} vznikne v místě nákrůžku reakce \mathcal{F}' , uvádějící těleso do statické rovnováhy. Jedná se taktéž o liniovou sílu. Její působení budeme nadále předpokládat po středním obvodu těsnění, tedy na poloměru $r_{ts} = 46,5$ mm, jak je zavedeno na obrázku 5.33. Je zřejmé, že tento předpoklad se projeví určitou nepřesností řešení. Bohužel však nevíme, jak je tlak po stykové ploše s těsněním rozložen, tudíž nejsme schopni vyhledat takový poloměr působíště síly, aby byl momentový účinek na příčný průřez rovinné části plně zachován. Velikost síly \mathcal{F}' v závislosti na síle \mathcal{F} je dána podmínkou statické rovnováhy v axiálním směru.

$$-\mathcal{F} (2\pi r_2) + \mathcal{F}' (2\pi r_{ts}) = 0 \quad (5.73)$$

$$\mathcal{F}' = \frac{r_2}{r_{ts}} \mathcal{F} \quad (5.74)$$

Hodnota síly \mathcal{F}' je přitom dána hodnotou tlaku q_o , který je třeba vyvinout na těsnění během montáže, aby byla zaručena jeho správná funkce. Platí tedy, že

$$\mathcal{F}' (2\pi r_{ts}) = q_o \frac{\pi (D_t^2 - d_t^2)}{4} \quad (5.75)$$

$$\mathcal{F}' = \frac{q_o (D_t^2 - d_t^2)}{8r_{ts}}, \quad (5.76)$$

kde parametry D_t a d_t představují velký a malý průměr těsnění. Hodnoty těchto průměrů jsou zjevné z obrázku 4.2 uvažovaného typu těsnění. Dosazením do vztahu (5.74) a následně do vztahu (5.72) pak získáme hodnotu síly předpětí F_i v jednom šroubu, v závislosti na požadovaném přítláčeném tlaku $q_o = 12$ MPa, definovaném v kapitole 4.

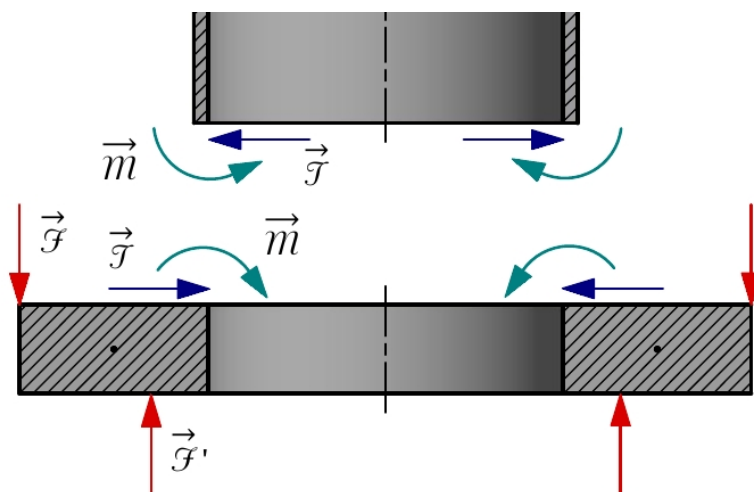
$$\mathcal{F} = \frac{q_o (D_t^2 - d_t^2)}{8r_2} \quad (5.77)$$

$$F_i = \frac{q_o \pi (D_t^2 - d_t^2)}{32} = 7012,03 \text{ N} \quad (5.78)$$

Již jsme se přesvědčili, že tuhost rovinné části příruby je řádově vyšší, než tuhost krku příruby. Tato skutečnost vyplývá ze vztahů (1.19) a (1.38) pro ohybové tuhosti B desky a momentové skořepiny. V následujících úvahách proto budeme uvažovat, že příčný průřez rovinné části setrvá během deformace beze změny. Tento předpoklad nám umožní modelovat rovinnou část příruby jako silně zakřivený, uzavřený prut, stejně jako je tomu v [13].

Budeme tedy opět řešit složené těleso, rovinnou část jako prutové těleso a krk příruby jako momentovou skořepinu. Podobně jako v kapitole 5.4 od sebe tělesa uvolníme a zavedeme styková silová působení – liniovou sílu \mathcal{T} a liniový moment \mathcal{M} , jak lze vidět na obrázku 5.34. V místě

spoje musí platit podmínky spojitosti a hladkosti deformace. Stěžejní pro nás bude především rovnost natočení ϑ_k rovinné části a skořepiny.



Obr. 5.34: Uvolnění rovinné části a skořepiny.

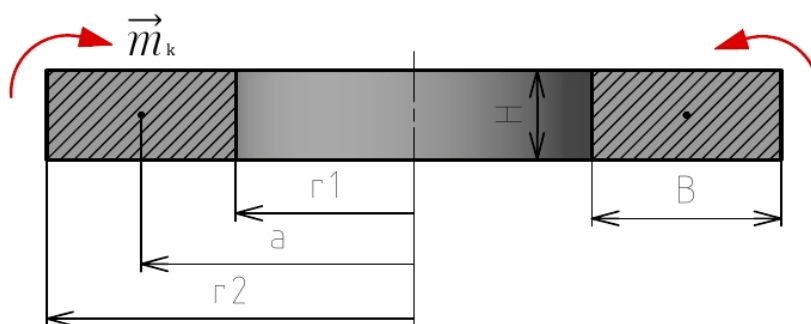
Při sestavování deformačních podmínek budeme opět vycházet z [13]. V důsledku značné tuhosti rovinné části příruby prohlásíme radiální posuv skořepiny u_{SK} v místě uvolnění za nulový. Natočení skořepiny ϑ_{SK} v tomto místě pak bude shodné s natočením ϑ_k příčného průřezu rovinné části. Dostaneme tak dvě deformační podmínky v následujícím tvaru:

$$u_{SK} = 0, \quad (5.79)$$

$$\vartheta_{SK} = -\vartheta_k. \quad (5.80)$$

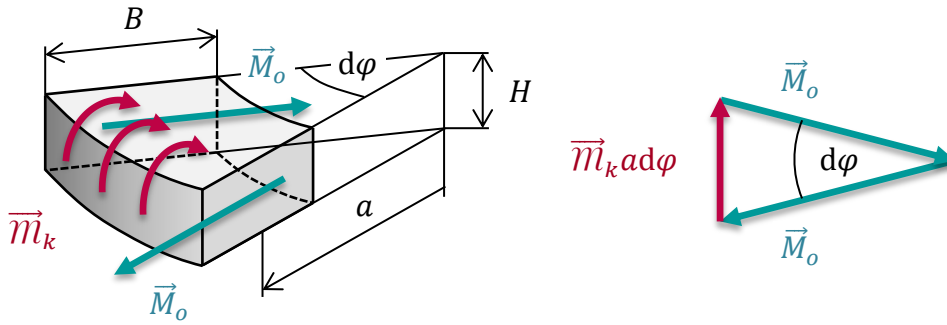
5.7.1 Řešení rovinné části příruby

Podívejme se nyní na silně zakřivený uzavřený prut, reprezentující rovinnou část příruby, samostatně. Na obrázku 5.35 můžeme vidět, jakým způsobem bude namáhán.



Obr. 5.35: Silně zakřivený prutový kroužek.

Moment m_k představuje celkový liniový kroutící moment, působící na střednici kroužku, tedy na poloměru a . Ačkoliv mluvíme o momentu kroutícím, prut není tímto momentem namáhán na krut, nýbrž na ohyb. Toto tvrzení vyplývá ze skutečnosti, že natočení příčného průřezu musí být ve všech místech stejné. Vůči sobě se tedy příčné průřezy nikterak nenatáčejí. Jediným nenulovým vnitřním výsledným účinkem tak bude ohybový moment, dále značený jako M_o . Velikost ohybového momentu M_o přitom musí být funkcí velikosti kroutícího momentu m_k , otázkou však zůstává jakou.



Obr. 5.36: Jednonásobně elementární prvek kroužku [28].

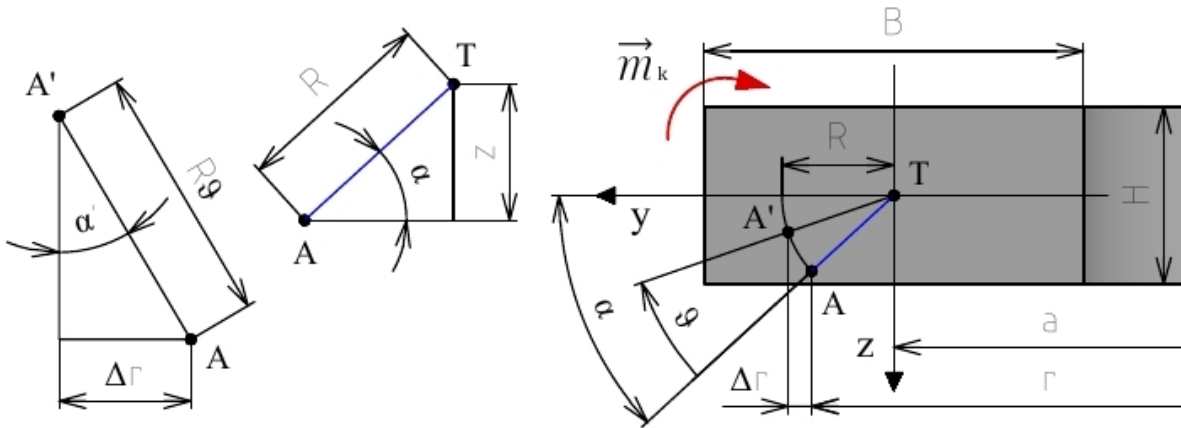
Na obrázku 5.36 vidíme jednonásobně elementární prvek kroužku. Takto uvolněný prvek musí být ve statické rovnováze, silový obrazec tudíž musí být uzavřený. Sepíšeme-li podmínku statické rovnováhy v tečném směru, dostaneme, že

$$m_k a d\varphi - 2M_o \sin \frac{d\varphi}{2} = 0. \quad (5.81)$$

Jelikož sinus velmi malého úhlu je přibližně roven velikosti tohoto úhlu, neboli $\sin \frac{d\varphi}{2} \doteq \frac{d\varphi}{2}$, dostaneme po drobné úpravě pro ohybový moment M_o vztah

$$M_o = a m_k. \quad (5.82)$$

Naším cílem je vyjádřit natočení ϑ_k příčného průřezu v důsledku působení kroutícího momentu m_k . Prvním krokem bude určení přetvoření ε_r délky libovolného vlákna kroužku. Vlákem budeme mít v tomto kontextu na mysli geometrické místo bodů ležících na kružnici vedené tělem prutu, se středem na ose rotační symetrie. Na obrázku 5.37 je poloha vyšetřovaného vlákna dána souřadnicemi r a z . Průmět tohoto vlákna do zobrazeného příčného průřezu je dán bodem A.



Obr. 5.37: Přetvoření rovinné části příruby.

Při natočení příčného průřezu o úhel ϑ_k přejde bod A do bodu A'. Poloměr vlákna se přitom zvětší o Δr . Pro přetvoření ε_r pak platí

$$\varepsilon_r = \frac{(r + \Delta r) - r}{r} = \frac{\Delta r}{r}. \quad (5.83)$$

Uvážíme-li malé deformace, pak bude úhel α' přibližně roven úhlu α a pro přírůstek Δr tak můžeme psát

$$\Delta r = R \vartheta_k \sin \alpha = \vartheta_k z. \quad (5.84)$$

Dosazením do vztahu (5.83) získáme následující finální vztah pro přetvoření.

$$\varepsilon_r = \frac{\vartheta_k z}{r} \quad (5.85)$$

Užitím Hookova zákona pro jednoosou napjatost následně vyjádříme napětí σ_r na libovolném vlákně kroužku.

$$\sigma_r = \frac{E \vartheta_k z}{r} \quad (5.86)$$

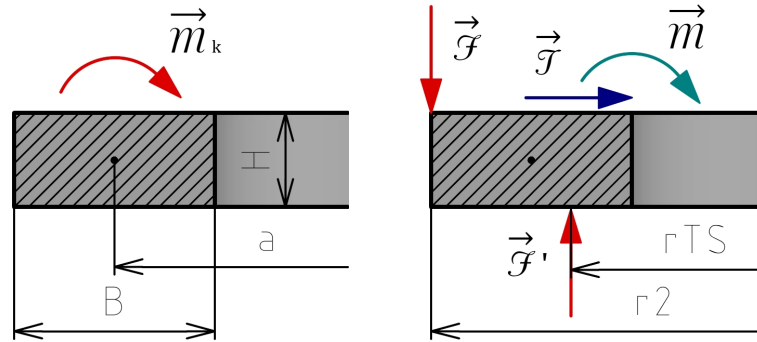
Celkový ohybový moment M_o je pak dán součtem napětí $\sigma_r(r, z)$ na všech vláknech procházejících příčným průřezem S .

$$M_o = \int_S z \sigma_r dS = \int_{-H/2}^{+H/2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{E \vartheta_k z^2}{r} dr dz = \frac{E \vartheta_k H^3}{12} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (5.87)$$

Hledaný vztah pro natočení ϑ_k dostaneme vyjádřením z rovnice (5.87) a dosazením z rovnice (5.82) za ohybový moment M_o .

$$\vartheta_k = \frac{12 m_k a}{E H^3 \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (5.88)$$

Kroutící moment m_k vystupující v doposud odvozených rovnicích představuje celkový momentový účinek na kroužek, vzniklý v důsledku působení sil $\mathcal{F}, \mathcal{F}', \mathcal{T}$ a momentu m .



Obr. 5.38: Zatížení v příčném průřezu.

Moment m_k je tak dle obrázku 5.38 dán pro náš konkrétní případ rovnicí

$$m_k = \frac{1}{2\pi a} \left[-\mathcal{F}(2\pi r_2)(r_2 - a) - \mathcal{F}'(2\pi r_{ts})(a - r_{ts}) + \mathcal{T}(2\pi r_1) \frac{H}{2} + m(2\pi r_1) \right] \quad (5.89)$$

$$m_k = \frac{1}{a} \left[-\mathcal{F} r_2 (r_2 - a) - \mathcal{F}' r_{ts} (a - r_{ts}) + \mathcal{T} r_1 \frac{H}{2} + m r_1 \right]. \quad (5.90)$$

Dosazením za \mathcal{F}' ze vztahu (5.74) pak dostaneme

$$m_k = \frac{1}{a} \left[-\mathcal{F} r_2 (r_2 - a) - \mathcal{F} r_2 (a - r_{ts}) + \mathcal{T} r_1 \frac{H}{2} + m r_1 \right] \quad (5.91)$$

$$m_k = \frac{1}{a} \left[-\mathcal{F} r_2 (r_2 - r_{ts}) + \mathcal{T} r_1 \frac{H}{2} + m r_1 \right]. \quad (5.92)$$

Vztah pro natočení ϑ bude mít tím pádem tvar

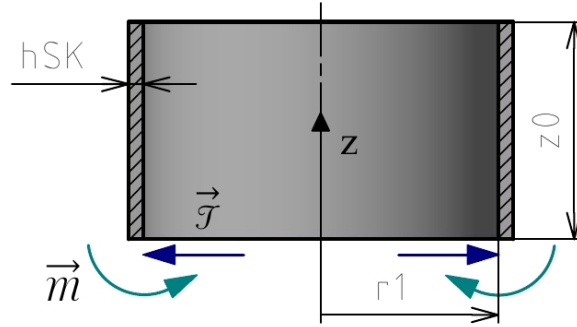
$$\vartheta_k = \frac{12}{EH^3 \ln \frac{r_2}{r_1}} \left[-\mathcal{F} r_2 (r_2 - r_{ts}) + \mathcal{T} r_1 \frac{H}{2} + m r_1 \right]. \quad (5.93)$$

Již jen formálně dosadíme za sílu \mathcal{F} ze vztahu (5.77), čímž obdržíme finální rovnici pro natočení ϑ jako funkci přítláčeného tlaku q_o a stykových silových působení m a \mathcal{T} .

$$\vartheta_k = \frac{12}{EH^3 \ln \frac{r_2}{r_1}} \left[-\frac{q_o(D_t^2 - d_t^2)}{8} (r_2 - r_{ts}) + \mathcal{T} r_1 \frac{H}{2} + m r_1 \right]. \quad (5.94)$$

5.7.2 Řešení krku příruby

Nyní se zaměříme na krk příruby, na který, jak již bylo řečeno, aplikujeme model momentové skořepiny. Situaci vidíme na obrázku 5.39.



Obr. 5.39: Uvolněná momentová skořepina.

Obdobnou úlohu jsme již řešili v rámci kapitoly 5.4, s tím rozdílem, že nyní uvažujeme montážní stav a tudíž nebude v rovnicích vystupovat uvažovaný přetlak p . Zároveň stále platí, že normálová síla $n_z = 0$. Úloha se tím pádem velmi zjednoduší, neboť partikulární řešení posuvu u_p bude nulové. Obecné řešení v posuvech tak budeme hledat ve tvaru

$$u = e^{-\beta z} (C_1 \sin \beta z + C_2 \cos \beta z). \quad (5.95)$$

Konstanty C_1 a C_2 určíme z následujících silových okrajových podmínek:

$$z = 0: \quad m_z = m \quad (5.96)$$

$$\mathcal{T}_{zr} = -\mathcal{T}. \quad (5.97)$$

Dosazením okrajových podmínek do rovnic (1.49) a (1.50) získáme soustavu

$$m = 2B_{SK} e^0 \beta^2 (C_1 \cos 0 - C_2 \sin 0) \quad (5.98)$$

$$-\mathcal{T} = -2B_{SK} e^0 \beta^3 (C_1 \sin 0 + C_1 \cos 0 - C_2 \sin 0 + C_2 \cos 0), \quad (5.99)$$

jejímž řešením jsou integrační konstanty C_1 a C_2 ve tvaru

$$C_1 = \frac{1}{2} \frac{m}{\beta^2 B_{SK}}, \quad (5.100)$$

$$C_2 = -\frac{1}{2} \frac{m\beta - \mathcal{T}}{B_{SK} \beta^3}. \quad (5.101)$$

Pro řešení stanovených deformačních podmínek nyní vyjádříme posuv u_{SK} a natočení ϑ_{SK} , a to dosazením integračních konstant do rovnic (5.95) a (1.48) pro $z = 0$.

$$u_{SK} = -\frac{1}{2} \frac{m\beta - \mathcal{T}}{B_{SK}\beta^3} \quad (5.102)$$

$$\vartheta_{SK} = \frac{1}{2} \frac{m}{\beta B_{SK}} + \frac{1}{2} \frac{m\beta - \mathcal{T}}{\beta^2 B_{SK}} \quad (5.103)$$

5.7.3 Vyhodnocení a rozbor D-N stavu krku příruby

Již máme vyjádřeno vše pro řešení deformačních podmínek (5.79) a (5.80). Pokud tak učiníme, dostaneme následující hodnoty stykové síly \mathcal{T} a momentu m .

$$m = 355,1 \text{ Nmm} \cdot \text{mm}^{-1} \quad (5.104)$$

$$\mathcal{T} = 44,3 \text{ Nmm}^{-1} \quad (5.105)$$

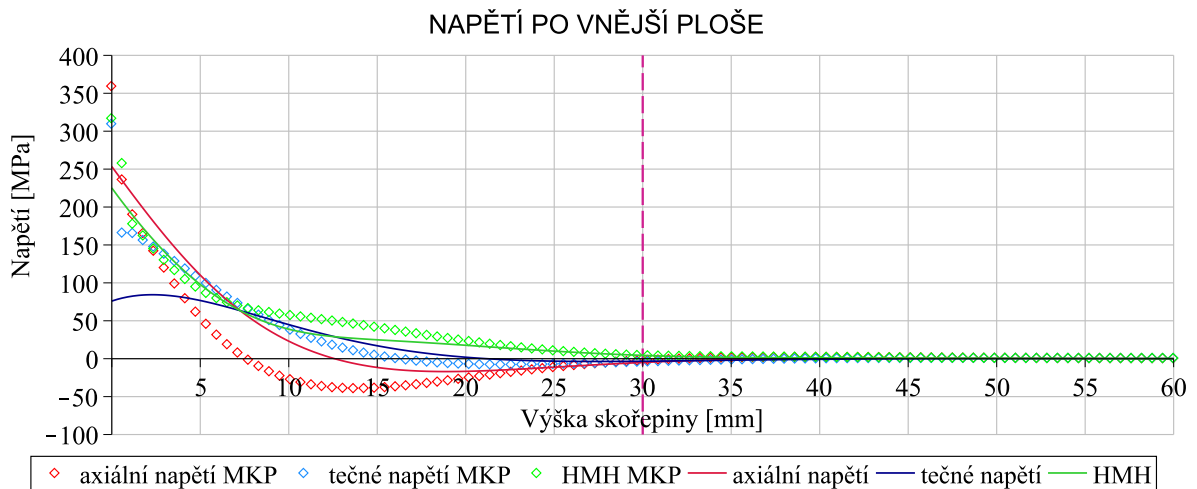
Máme-li hodnoty stykových sil, můžeme plynule přejít ke zhodnocení D-N stavu momentové skořepiny, představující krk příruby. Průběhy napětí σ_z a σ_t po vnější a vnitřní ploše skořepiny jsou dány rovnicemi (1.51). Vztahy pro momenty m_z a m_t vystupující v rovnicích pro napětí plynou z rovnic (1.49) a (1.37). Zbývá tak vyjádřit axiální posuv w a na něm závislou sílu n_t .

$$n_t = \frac{Eh_{SK}u}{r_S} = \frac{Eh_{SK}e^{-\beta z}(C_1 \sin \beta z + C_2 \cos \beta z)}{r_S}. \quad (5.106)$$

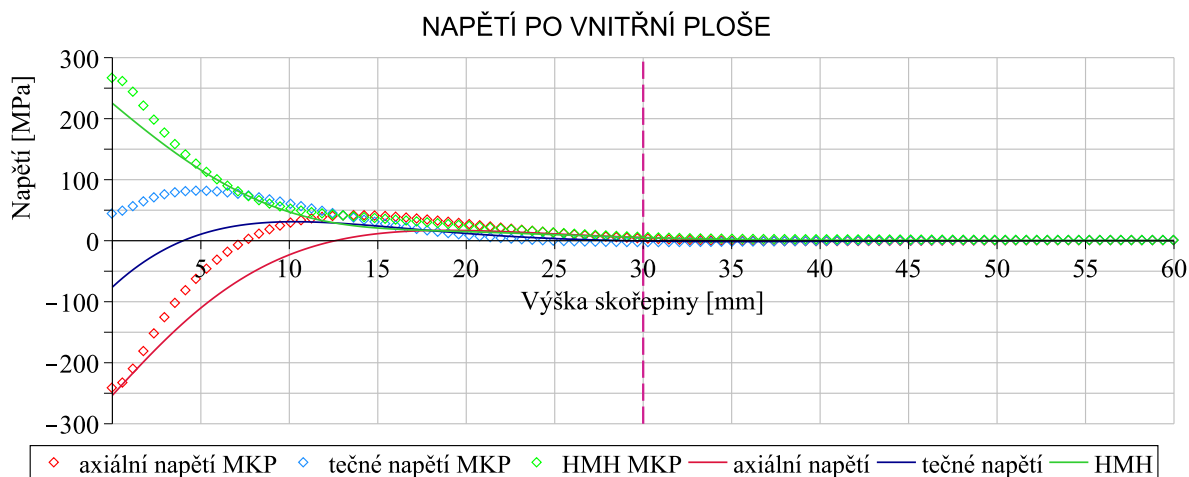
Redukované napětí dle podmínky HMH je stejně jako ve všech doposud řešených případech dáno rovnicí

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_z^2 + \sigma_t^2 - \sigma_z \sigma_t}. \quad (5.107)$$

Průběhy jednotlivých složek napětí a napětí redukovaného vidíme na obrázcích 5.40 a 5.41. Tatáž úloha byla pro účely porovnání výsledků vymodelována v prostředí programu Ansys jako 2D axisymetrická, veškeré náležitosti a parametry odpovídají dosud řešeným úlohám.



Obr. 5.40: Průběhy napětí po vnější ploše.



Obr. 5.41: Průběhy napětí po vnitřní ploše.

V případě průběhů napětí po vnější ploše jsou z výpočtů odchylek již tradičně vyřazeny první dvě extrémní hodnoty, nacházející se v těsné blízkosti ostrého přechodu mezi krkem a rovinnou částí příruby (singularita geometrie).

Odchylkám mezi průběhy napětí jsou na vině zejména zjednodušující předpoklady uplatněné v analytickém řešení. Aplikací teorie silně zakřivených prutů na rovinnou část příruby jsme z úvah vyřadily důležité vlivy spojené s její deformací. Příčný průřez rovinné části zde uvažujeme po dobu deformace neměnný, čímž zanedbáváme natočení jednotlivých válcových řezů vůči sobě. Dalším poměrně razantním zjednodušením je předpoklad nulového posuvu skořepiny v místě spojení s rovinnou částí. Následky této deformační podmínky jsou patrné z průběhů radiálního posuvu, dále na obrázku 5.42.

	MAE [MPa]	E_{\max} [MPa]	R^2 [–]
tečné napětí σ_t	7,5	82,5	0,83
axiální napětí σ_z	13,3	58,5	0,62
redukované napětí σ_{red}	4,3	20,6	0,96

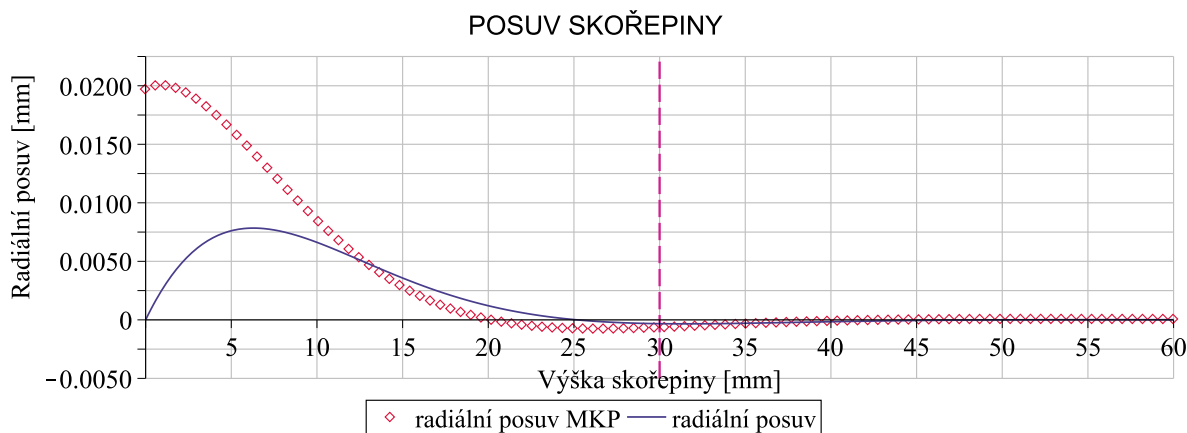
Tab. 5.12: Zhodnocení průběhů napětí po vnější ploše skořepiny.

	MAE [MPa]	E_{\max} [MPa]	R^2 [–]
tečné napětí σ_t	14,7	78,4	-0,34
axiální napětí σ_z	12,7	38,8	0,81
redukované napětí σ_{red}	5,2	49,8	0,97

Tab. 5.13: Zhodnocení průběhů napětí po vnitřní ploše skořepiny.

Překvapivě vysoké shody analytického řešení s řešením numerickým můžeme pozorovat v případě průběhů axiálního a redukovaného napětí, což dokazují poměrně vysoké hodnoty koeficientů determinace z tabulek 5.12 a 5.13. Jediný významný problém lze pozorovat v případě průběhu tečného napětí po vnitřní ploše skořepiny. Zde v důsledku rozbíhavosti průběhů vykazuje koeficient determinace zápornou hodnotu.

Stejným způsobem jako napětí jsou na obrázku 5.42 porovnány průběhy radiálního posuvu u . Zde můžeme vidět již zmíněný dopad uvažované deformační podmínky (5.79) o nulovém radiálním posuvu v místě spojení s rovinnou částí. Numerické řešení v této oblasti vykazuje v porovnání s analytickým řešením více než dvakrát vyšší hodnoty radiálního posuvu. S vyššími hodnotami radiálního posuvu pak přímo souvisí vyšší hodnoty tečného napětí σ_t , jak je patrné z vykreslených průběhů napětí.



Obr. 5.42: Průběhy radiálního posuvu.

	MAE [mm]	E_{\max} [mm]	R^2 [–]
radiální posuv u	$19,56 \cdot 10^{-4}$	$19,67 \cdot 10^{-3}$	0,44

Tab. 5.14: Zhodnocení průběhů radiálního posuvu skořepiny.

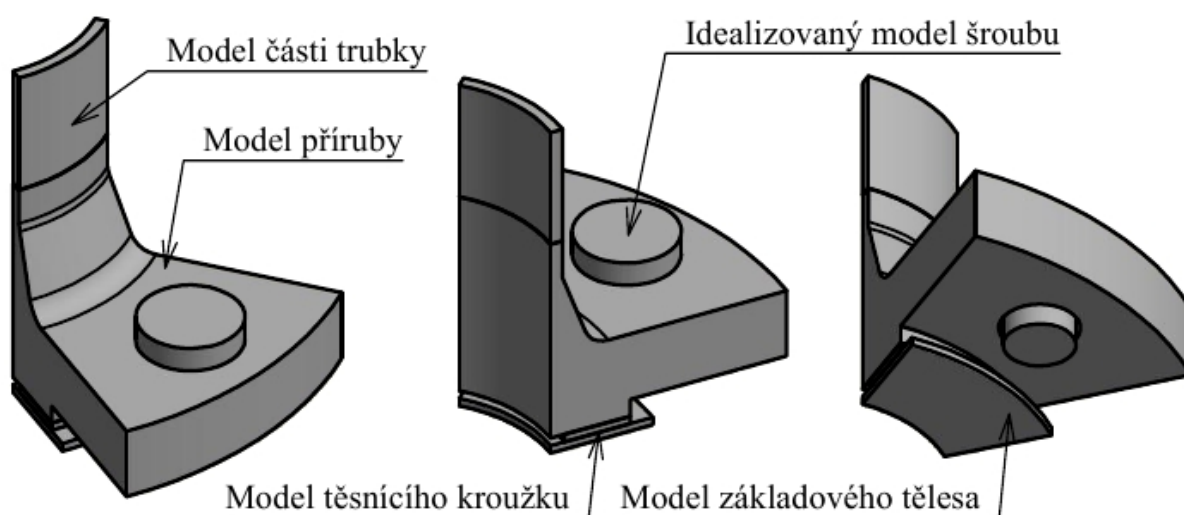
S přihlédnutím na poměrně nízkou hodnotu koeficientu determinace a vysoké hodnoty střední a maximální chyby lze považovat kvalitu aproximace numerického řešení řešením analytickým v případě průběhu radiálního posuvu za velmi nízkou.

6 Modelování příruby jako 3D tělesa

V rámci výpočtové části jsme vyšetřovali D-N stav příruby zejména aplikací analytických přístupů. Bylo zřejmé, že aby mohly být tyto přístupy použity, bylo zapotřebí přijmout četná zjednodušení reálného problému. Postupně jsme se zde snažili přiblížit realitě zohledněním dílčích vlivů, které byly v předchozích výpočtech zanedbány. Nyní se reálnému problému opět o krok přiblížíme. Přírubu budeme modelovat v prostředí Ansys Workbench jako 3D těleso odpovídající reálné geometrie, patrné z kapitoly 4. Budeme se přitom snažit co nejvíce přiblížit reálným zatěžujícím podmínkám.

6.1 Postup a cíle výpočtového modelování

Sestava vstupující do výpočtů se bude skládat z modelu příruby reálné geometrie, modelu ocelového těsnicího kroužku, idealizovaných modelů šroubů sloužících k vyvození požadovaných sil předpětí, modelu části trubky přivařené k horní části krku příruby a nedeformovatelného základového tělesa. Celá sestava je přitom charakteristická svou rotační souměrností, která nám umožní použít osminový model geometrie, zjevný z obrázku 6.1. Tento model geometrie byl vytvořen v programu Autodesk Inventor a následně importován do prostředí Ansys Workbench.

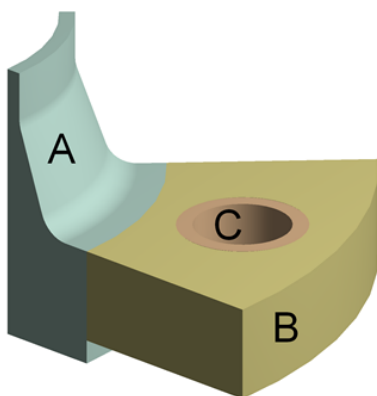


Obr. 6.1: Osminový model geometrie sestavy.

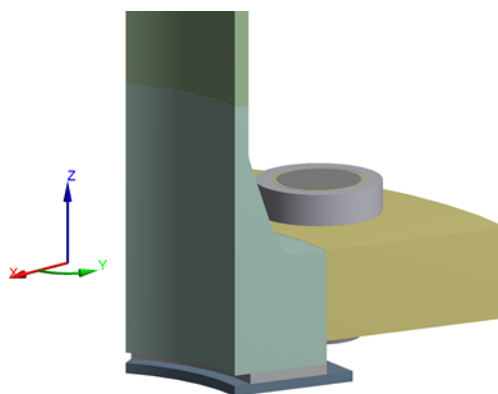
Při D-N analýze budeme postupovat chronologicky v následujícím pořadí. Nejprve budeme sestavu modelovat jako 3D „rotačně symetrické“ těleso, užitím zmíněného osminového modelu. Takto vytvořený model bude obsahovat přibližně osmkrát menší počet použitých prvků, což značně sníží časovou náročnost výpočtů. Následně provedeme globální zhodnocení výsledků. Zajímat nás budou zejména výsledky redukovaného napětí dle podmínky HMM (tedy „Equivalent (von Mises)“) a celkové deformace příruby („Total Deformation“). V druhé části pak provedeme zhodnocení průběhů napětí podél vnitřní plochy krku příruby. Cílem bude sestavení průběhů redukovaného, axiálního a tečného napětí a jejich porovnání s analytickým řešením z kapitoly 5. Obdobně provedeme rovněž porovnání průběhů radiálního posuvu (neboli „Directional Deformation“). V této části se setkáme s menším problémem, neboť přímé užití rotační symetrie neumožňuje vykreslování průběhů napětí podél cest.

6.2 Cyklická symetrie a konečnoprvková síť

Pro vytvoření vyhovující konečnoprvkové sítě v daných místech byl model příruby rozdělen dvěma řezy pomocí funkce „Slice“ na tři dílčí části, viz obrázek 6.2. Prvním řezem, vedeným podél vnější válcové plochy nákrůžku, byl oddělen krk příruby spolu s nákrůžkem (část A) od rovinné části příruby (část B). Obdobným způsobem byl separován objem rovinné části příruby pod dosedací plochou šroubu (část C). Aby byla příruba při výpočtech nadále vnímána jako celistvé těleso, je třeba pomocí příkazu „Form New Part“ vytvořit ze získaných dílčích částí kompaktní jednotku. Tvorbu sítě můžeme nyní provádět postupně v jednotlivých částech příruby, a to užitím různých síťovacích metod a v omezené míře i různé velikosti prvků.



Obr. 6.2: Části modelu příruby.

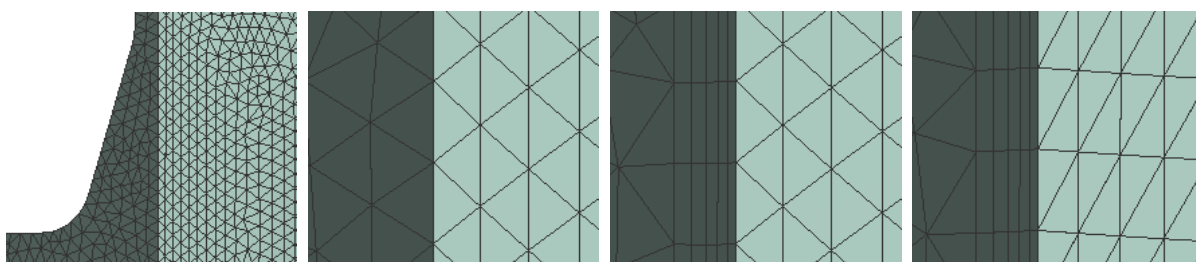


Obr. 6.3: Cylindrický souřadný systém.

Dříve, než začneme se samotnou tvorbou sítě, je třeba zadefinovat cyklickou symetrii geometrie. Pro tyto účely zavedeme lokální cylindrický souřadný systém, jehož poloha bude dána libovolnou válcovou plochou osminového modelu geometrie, viz obrázek 6.3. Princip řešení rotačně symetrických 3D úloh pomocí cyklické symetrie spočívá ve znásobení sítě opakujícího se segmentu geometrie tělesa. Pro úplnost poznamenejme, že tento segment je z tělesa vyjmut dvěma meridiánovými řezy, neboli rovinami, jejichž průsečnice je totožná s osou rotační symetrie řešeného tělesa. V případě našeho osminového modelu bude každý uzel sítě znásoben celkem osmkrát, a posunut vždy o 45° ve směru osy y lokálního souřadného systému. Z tohoto plyne důležitá podmínka, která musí být splněna, a to že sítě po plochách meridiánových řezů musí být totožné. To je však ošetřeno již samotnou funkcí „Cyclic Region“ ze záložky „Symmetry“, kterou pro cyklicky symetrické chování použijeme. Z tohoto důvodu je účelné (nikoliv nezbytné) symetrii nastavit dříve, než začneme se samotným síťováním těles. Do funkce „Cyclic Region“ zadáme roviny řezů („Low Boundry“ a „High Boundry“) a souřadný systém, dle kterého bude segment rotován. Zde uplatníme vytvořený lokální cylindrický souřadný systém. Nyní můžeme přejít k síťování dílčích těles.

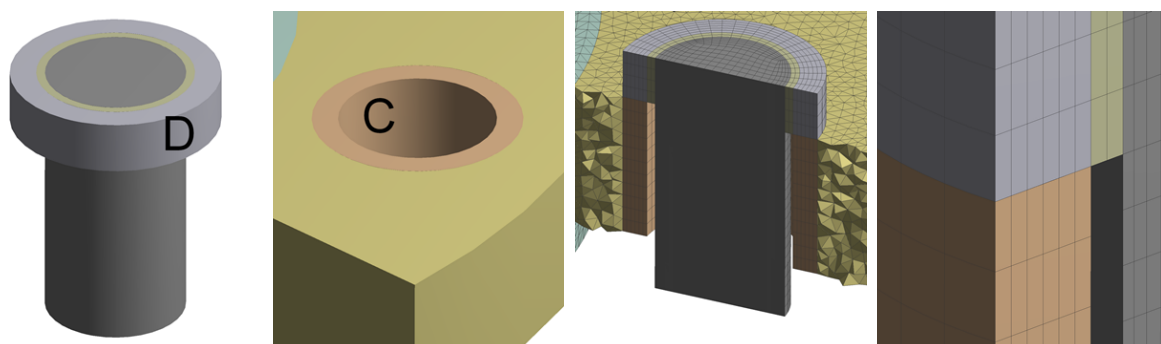
Část A byla síťována pomocí čtyřstěnných prvků, tedy metodou „Tetrahedrons“. V porovnání s metodou „Hex Dominant“, která využívá šestistěnných prvků, vykazuje tato metoda vyšší časovou náročnost řešení, neboť k vysíťování stejného objemu je zapotřebí vyšší počet elementů. Pro nás je však v tuto chvíli výhodná, neboť umožňuje použití funkce „Inflation“. Pomocí této funkce docílíme zvýšené hustoty sítě podél jednotlivých vnějších ploch. Síť je přitom zhušťována ve vrstvách v kolmém směru na plochu, na kterou je podmínka uvalena. Jak lze vidět dále na obrázku 6.6, funkce „Inflation“ byla aplikována na vnitřní plochu příruby, zatíženou vnitřním přetlakem p , dále na plochu nákrůžku, kde dochází ke kontaktu s těsnícím kroužkem a v neposlední řadě rovněž na vnější plochu v oblasti zaoblení, neboť jak jsme se přesvědčili již v

podkapitole 5.5 výpočtové části, s velkou pravděpodobností se zde budou po povrchu vyskytovat zvýšené hodnoty napětí. V kombinaci s funkcí „Inflation“ bylo dále využito funkce „Face Meshing“, jejíž aplikací na příslušné plochy byly prvky zhuštěné povrchové vrstvy setříděny v tzv. „mapovanou síť“. Postup tvorby sítě podél vnějších ploch části A je patrný v z obrázku 6.4. Na posledním obrázku můžeme vidět, jakým způsobem se projeví požadavek na zmíněnou „mapovanou síť“. Z původní tzv. „volné sítě“, jejíž prvky nabývají nahodilého tvaru, získáváme pravidelnou síť, s opakujícím se tvarem elementů.



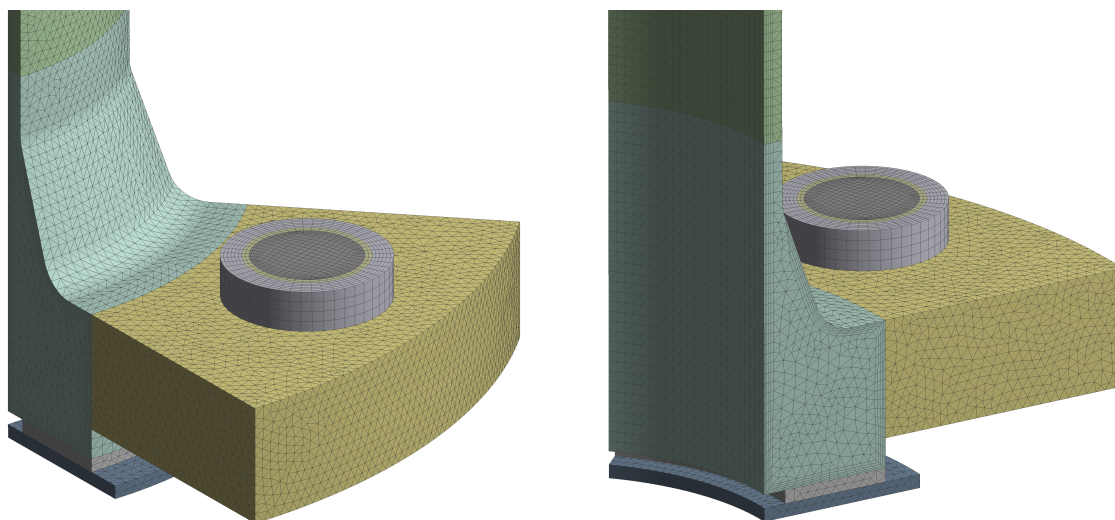
Obr. 6.4: Funkce „Inflation“ a „Face Meshing“.

Jako druhá byla síťována část C. Zde byla použita metoda „Multizone“, využívající šestistěnných prvků, obdobně jako metoda „Hex Dominant“. Použití metody „Multizone“ však vede na mapovanou (pravidelnou) síť, v čemž spočívá její hlavní výhoda oproti metodě „Hex Dominant“. V nyní projednávané oblasti C rovinné části příruby dochází ke kontaktu s hlavou šroubu. Jak si později ukážeme, tento kontakt je modelován jako „Frictional“, interakce mezi stykovými plochami je zde definována hodnotou koeficientu tření 0,2. Aby byly výsledky získané v oblasti styku se šroubem co nejpřesnější, je třeba, aby síť po stykové ploše části C odpovídala síti po stykové ploše šroubu. Pro tyto účely byl model šroubu, obdobně jako model příruby, rozdělen na tři části, viz obrázek 6.5. Pro nás je nyní nejdůležitější část D, separovaná válcovým řezem podél vnitřní plochy díry pro šroub. Tato část je stejně jako zbylé části šroubu síťována metodou „Multizone“. Části C a D byly nadále síťovány souběžně, snahou přitom bylo získat síť totožného tvaru. Tohoto bylo docíleno definováním stejné velikosti prvků, a to uvalením podmínky „Face Sizing“ na vnější válcové plochy. Dále byly aplikovány podmínky „Face Meshing“ na vodorovné stykové plochy a stanoveny stejné počty vnitřního dělení (parametr „Internal Number of Divisions“).



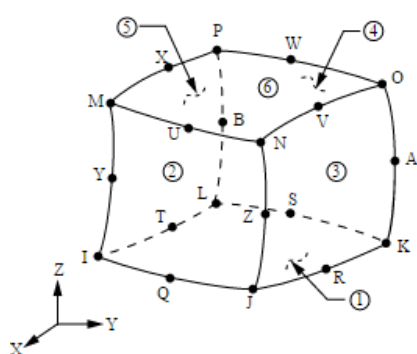
Obr. 6.5: Síť o oblasti stykové plochy s hlavou šroubu.

Jako poslední byla z modelu příruby vysíťována část B. Použita byla metoda „Tetrahedrons“ bez dalších úprav. Postupy síťování zbylých modelů sestavy již nebude popsáno takto do podrobně. Byly však použity takové metody síťování a operace, aby bylo zajištěno co možná nejlepší napojení na síť příruby. Konečnou podobu sítě můžeme vidět na obrázku 6.6.

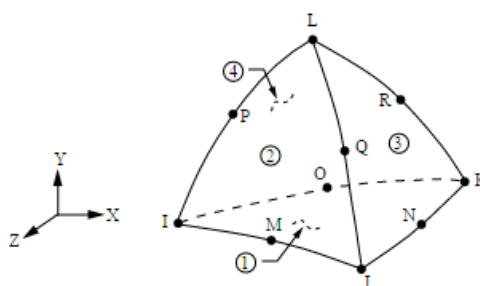


Obr. 6.6: Výsledná konečnoprvková síť.

Objem těles byl vysítován pomocí prvků typu SOLID186 a SOLID187. V obou případech se jedná o 3D prvky vyššího řádu, neboli prvky kvadratické, obsahující středové uzly, tzv. „Element Midside Nodes“. Jak již bylo poznamenáno v úvodu výpočtové části, použití středových uzlů vede k přesnějším výsledkům za použití nižšího počtu elementů. Tvar prvku typu SOLID186 je patrný z obrázku 6.7. Zde můžeme vidět, že se skládá celkem z 20 uzlů. Dvakrát menší počet uzlů obsahuje prvek typu SOLID187, patrný z obrázku 6.8. Kromě prostorových prvků, vyplňujících objem jednotlivých těles, bylo dále použito plošných prvků, reprezentujících kontakty mezi tělesy (problematika kontaktů viz. další podkapitola), popřípadě zatížení. Kontaktní plochy definované jako „Contact“ byly pokryty prvky typu CONTA174, kontaktní plochy definované jako „Target“ pak prvky typu TARGE170. Vnitřní válcová plocha příruby a trubky, zatížená vnitřním přetlakem p , dále prvky typu SURF154. Geometrie těchto elementů, odpovídá geometrii prvků prostorové sítě po dané ploše, rovněž se tedy jedná o prvky kvadratické. Pro vyvození sil předpětí ve šroubech je využito prvků typu PRETS179.



Obr. 6.7: Prvek SOLID186 [29].



Obr. 6.8: Prvek SOLID187 [30].

Počáteční velikost prvků byla nastavena na 2,9 mm. Jedná se o rozměr odpovídající tloušťce krku příruby v nejužší části. Dále byla síť zjemňována a současně pozorovány rozdíly mezi výsledky. Dostatečně přesné hodnoty byly získány již při použití prvků o velikosti 1,5 mm. Pro středovou část šroubu byly použity prvky o velikosti 1,3 mm tak, aby došlo k vyhovujícímu napojení již vytvořené sítě části D. Celkový počet použitých elementů a uzlů řešené sestavy je patrný z tabulky 6.1.

počet elementů	164734
počet uzlů	307285

Tab. 6.1: Počet použitých elementů a uzlů 3D sestavy.

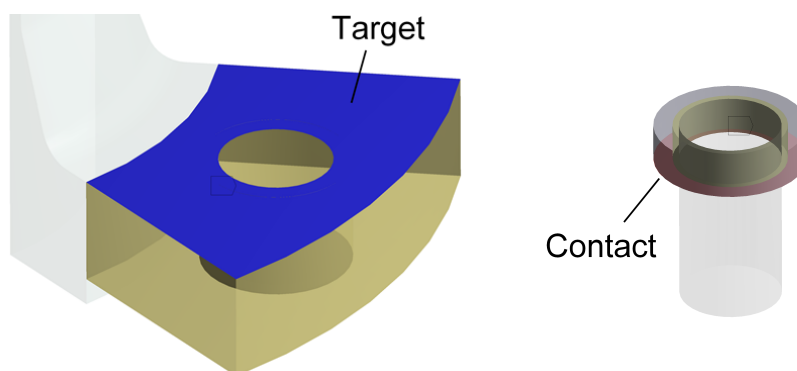
6.3 Kontakty mezi tělesy

Při zatěžování soustavy bude hrát významnou roli interakce mezi jednotlivými modely těles – potýkáme se s tzv. „kontaktní úlohou“. Kontakt může být v programu Ansys zaveden mezi dvěma a více tělesy. Je proto nutné přesně zadefinovat, mezi kterými tělesy k dané interakci dochází. Zúčastněná tělesa tak rozdělujeme do dvou skupin – „Contact Bodies“ (kontaktní tělesa) a „Target Bodies“ (cílová tělesa). Ke kontaktu těchto dvou skupin těles přitom zpravidla dochází prostřednictvím stykových ploch, které je rovněž nutno přesně stanovit. Stykové plochy náležící kontaktním tělesům definujeme jako „Contact“ a stykové plochy cílových těles jako „Target“. Volbu kontaktních a cílových těles v konkrétních případech budeme provádět na základě následujících kritérií, převzatých z [31]:

1. Při kontaktu tuhých těles s tělesy poddajnými definujeme stykové plochy tuhých těles jako „Target“ a stykové plochy poddajných těles jako „Contact“.
2. Při kontaktu poddajných těles definujeme větší ze stykových ploch jako „Target“ a menší jako „Contact“.

Existuje řada dalších kritérií, ve kterých figuruje například velikost nebo řád použitých prvků. V případě naší sestavy jsou však u všech těles použity prvky téhož (vyššího) řádu a téže velikosti.

Nyní se podívejme podrobněji na kontakt mezi hlavou šroubu a horní plochou rovinné části příruby. Zde je uvažován kontakt třením (varianta „Frictional“). Při volbě kontaktních ploch je třeba zohlednit možné deformace. Z tohoto důvodu nestačí kontakt definovat pouze mezi částí C příruby a částí D šroubu, neboť v deformovaném stavu budou tyto stykové plochy s největší pravděpodobností zasahovat do sousedních oblastí. Dle 2. kritéria tak definujeme stykové plochy částí B a C příruby jako „Target“, stykové plochy části D a E šroubu jako „Contact“.



Obr. 6.9: Definice kontaktu šroubu s přírubou.

Kontakt typu „Frictional“ je rovněž definován mezi plochami nákržku a těsnění a dále mezi těsněním a tuhým základovým tělesem. Ve všech případech je uvažována hodnota koeficientu tření 0,2. Zbývá zadefinovat interakci mezi krkem příruby a trubicí. Tělesa jsou v tomto místě pevně spojena pomocí kontaktu typu „Bonded“. Jedná se tedy o určitou idealizaci reálného svarového spoje.

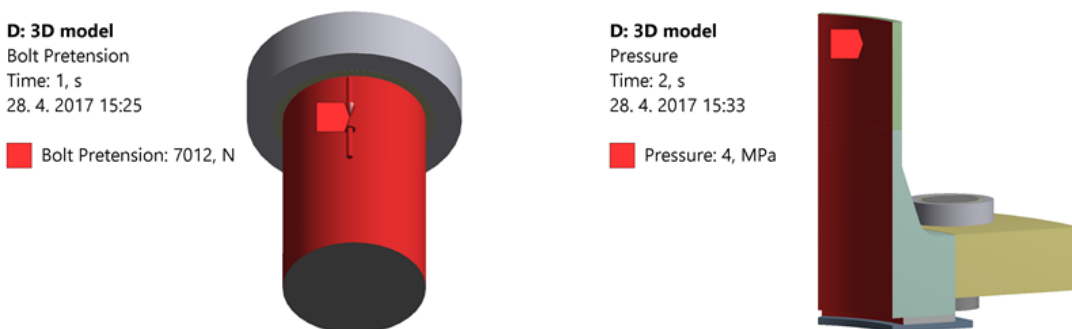
6.4 Okrajové podmínky a zatížení

Při sestavování deformačních okrajových podmínek bylo vycházeno zejména z uvažovaného dokonale tuhého základového tělesa, ke kterému je příruba připevněna pomocí šroubů. Požadovaného chování bylo docíleno aplikací okrajových podmínek typu „Fixed Support“ na všechny plochy modelu základového tělesa, kromě meridiánových ploch řezu, a dále na spodní plochu modelu šroubu. Mezi deformační okrajové podmínky lze zařadit rovněž již definovanou cyklickou symetrii.



Obr. 6.10: Deformační okrajové podmínky.

Zatěžování bude probíhat ve dvou krocích. Prvním zatěžovacím krokem bude dotažení šroubů na požadovanou hodnotu sil předpětí. Tohoto docílíme uvalením silové okrajové podmínky typu „Bolt Pretension“ na válcovou plochu dříku modelu šroubu. Pro účely následného porovnání analytického řešení z podkapitoly 5.7 výpočtové části budeme uvažovat též hodnotu síly předpětí, tedy 7012,03 N. Vyvozením sil předpětí bude dosaženo montážního stavu příruby. V druhém kroku bude doplněno zatížení vnitřním přetlakem o velikosti 4 MPa. Zde použijeme silovou okrajovou podmínku „Pressure“, kterou aplikujeme na vnitřní válcové plochy modelu příruby, trubky a těsnícího kroužku.



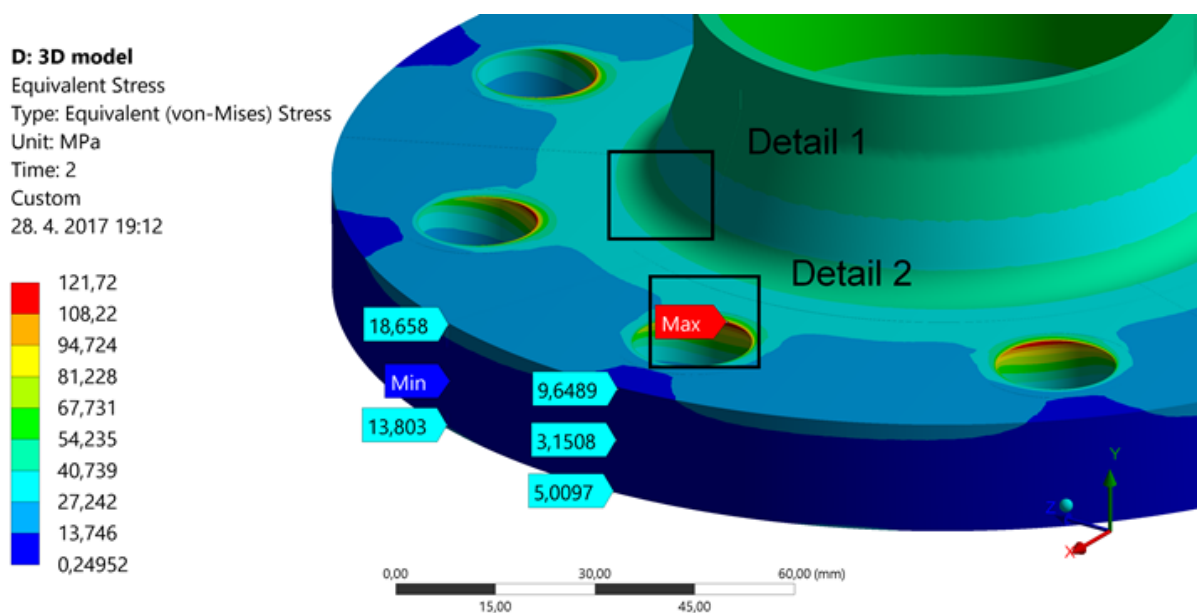
Obr. 6.11: Silové okrajové podmínky.

6.5 Globální zhodnocení D-N stavu příruby

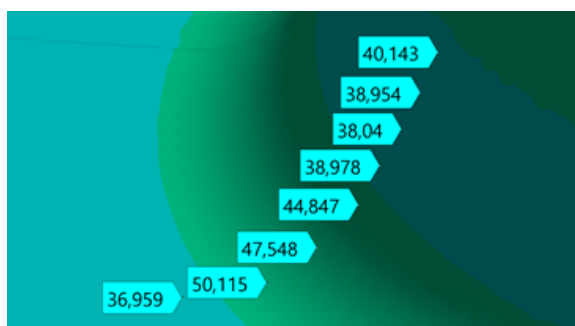
Řešením úlohy byly hledány výsledky redukovaného napětí dle podmínky HMH („Equivalent (von Mises)“), radiálního napětí („Normal Stress“) ve směru osy x lokálního souřadného systému) a celkové deformace („Total Deformation“). Při hodnocení se budeme zaměřovat zejména na oblast krku příruby a oblast styku s předepjatými šrouby. Z důvodu singularit se záměrně vyhneme ostrému přechodu mezi nákrůžkem a rovinou částí. Rovněž pomíneme stykovou plochu

s těsněním, neboť ačkoliv těsnící kroužky uvažovaného typu existují, jejich použití je v dnešní době mizivé.

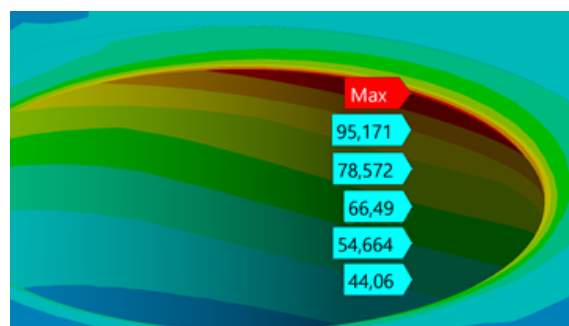
Nejprve se podíváme na výsledky napětí. Na obrázcích 6.12 a 6.15 jsou vykresleny hodnoty redukovaného napětí. Maximální redukované napětí, nabývající hodnoty 122 MPa, se zde nachází v oblasti styku s předepjatými šrouby. Naopak nejnižších hodnot nabývá redukované napětí po vnějším obvodu rovinné části. Minimální hodnoty jsou zde v některých místech téměř nulové. Při hodnocení výsledků je třeba mít na paměti, že redukované napětí bude vždy dosahovat kladných hodnot, nezávisle na tom, zda se jedna o tlakovou, nebo tahovou oblast. Vytrácí se tak zásadní informace o charakteru napjatosti tělesa v daném místě, která je klíčová pro posouzení možného porušení materiálu například v důsledku vzniku trhlin, apod.



Obr. 6.12: Radiální posuv složeného tělesa v MKP.

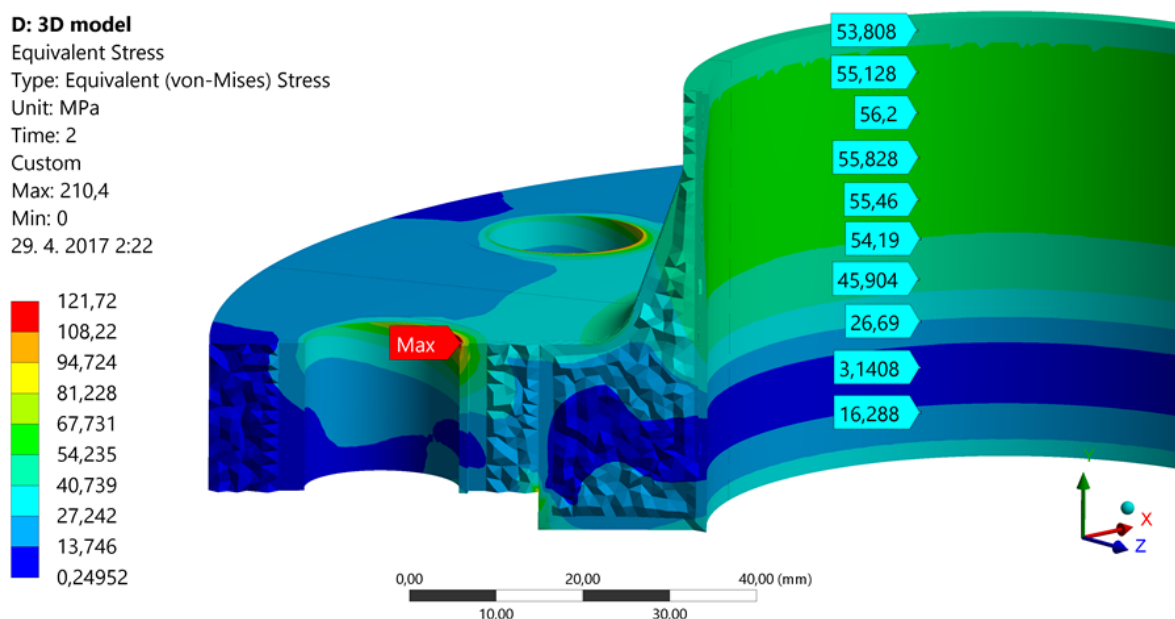


Obr. 6.13: HMH [MPa] – Detail 1.



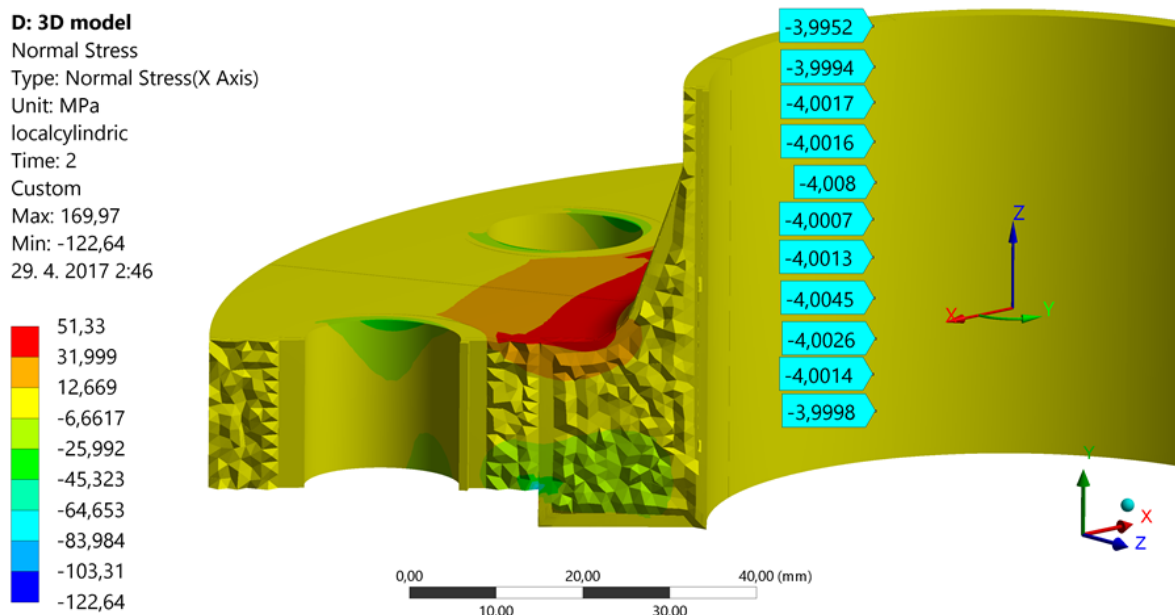
Obr. 6.14: HMH [MPa] – Detail 2.

Zaměříme se nyní na oblast zaoblení mezi krkem a rovinnou částí příruby. V podkapitole 5.5 výpočtové části bylo demonstrováno, že v místě zaoblení dochází po vnějším povrchu k výskytu zvýšených hodnot napětí. Z obrázku 6.13 lze vidět že zde redukované napětí dosahuje maximální hodnoty přibližně 50 MPa. Z hlediska mezního stavu pružnosti se tak nejedná o kritickou oblast. Značně vyšší hodnoty redukovaného napětí lze pozorovat v okolí globálního maxima, tedy v místě spojení šrouby. I zde se však pohybujeme v hodnotách hluboko pod mezí kluzu $Re = 245$ MPa. Ani tato oblast tím pádem nepředstavuje kritické místo z hlediska možných mezních stavů.



Obr. 6.15: Redukované napětí příruby v řezu.

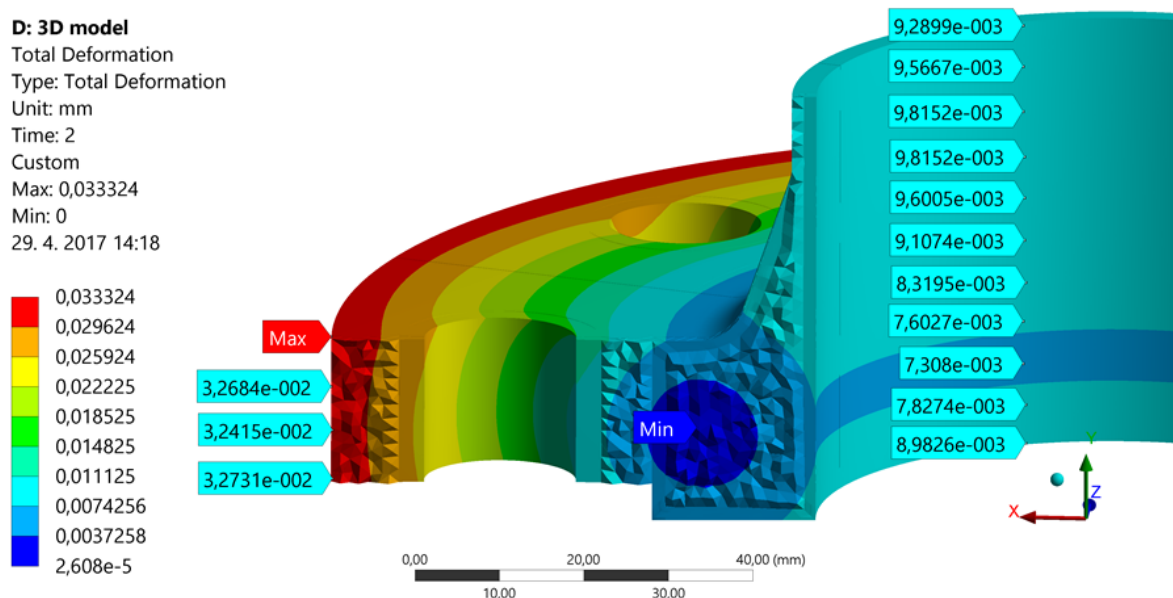
Na obrázku 6.15 vidíme vykreslené hodnoty redukovaného napětí v řezu. Zde se zaměříme na vnitřní válcovou plochu příruby. Maximální redukované napětí zde dosahuje hodnoty 56 MPa. Průběh redukovaného napětí podél vnitřní válcové plochy bude vykreslen v následující podkapitole, zde bude zároveň porovnán s analytickým řešením. Nyní se podíváme na výsledky radiálního napětí. Zde lze předpokládat, že hodnoty po vnitřní válcové ploše budou odpovídat hodnotě vnitřního přetlaku p , což jak lze vidět z obrázku 6.16 skutečně platí.



Obr. 6.16: Radiální napětí příruby v řezu.

Nyní přejdeme k výsledkům celkové deformace. Z obrázku 6.17 vidíme, že k největším posuvům dochází po vnější ploše rovinné části příruby. Maximum zde dosahuje hodnoty 0,033 mm. Naopak nejnižší hodnoty posuvů pozorujeme v oblasti rovinné části nad nákrůžkem. V tomto

místě je soustředěno velké množství materiálu, proto není překvapujícím zjištěním, že se tato oblast vyznačuje značnou tuhostí. Hodnoty posuvů se zde pohybují v řádech desetitisícin milimetrů. Po vnitřní válcové ploše příruby dosahují celkové deformační posuvy hodnot téměř v řádech setin milimetrů. Lepší informaci o deformaci krku příruby však získáme z průběhů radiálního posuvu, se kterým se setkáme v rámci následující podkapitoly.



Obr. 6.17: Totální deformace příruby.

6.6 Zhodnocení D-N stavu krku příruby ve vztahu k analytickému řešení

Jedním z hlavních cílů této práce byla aplikace dostupných analytických přístupů na reálný problém. Toho jsem docílili v rámci výpočtové části, kde jsme řešenou přírubu modelovali jako složené těleso. Samotný výpočet D-N stavu byl proveden zvlášť s uvažováním vnitřního přetlaku (model AM1) a zvlášť s uvažováním sil předpětí v místě spojení šrouby (model AM2). Dosud však nebylo zhodnoceno, do jaké míry jsou výsledky získané analytickým řešením aplikovatelné na původní reálný problém. Pro účely tohoto zhodnocení budeme vzájemně porovnávat průběhy napětí a deformace po vnitřní válcové ploše příruby, neboť tato plocha setrvává nezměněna i po aplikaci zjednodušujících předpokladů reálné geometrie, nezbytných pro využití analytických přístupů řešení.

Průběhy napětí a deformace budou v případě 3D modelu příruby vykresleny podél cesty patrné z obrázku 6.19. Tato cesta je definována polohou počátečního a koncového bodu. Počáteční bod se nachází na spodní hraně s plochou nákržku, koncový bod pak na vrchní hraně modelu trubky. Pro správnou funkci je třeba aby tyto body byly semknuty s uzly sítě, čehož docílíme užitím příkazu „Snap to mesh nodes“. Výsledky budeme dále vyhodnocovat pouze v oblasti krku příruby.

Z deformačních posuvů nás bude zajímat posuv v radiálním směru, tedy „Directional Deformation“ ve směru osy x lokálního souřadného systému. Z napjatosti budeme hledat průběhy tečného a axiálního napětí („Linearized Normal Stress“ v příslušných směrech lokálního souřadného systému) a průběh redukovaného napětí dle podmínky HMH („Linearized Equivalent

Stress“). Zde se však dostáváme do problémů, neboť použitá funkce „Cyclic Region“ vykreslování napětí podél cest neumožňuje. Cyklicky symetrické chování osminového modelu geometrie je proto nutno zadefinovat manuálně. Využijeme zde příkazu *cpcyc*, který má následující strukturu [32]. Význam jednotlivých členů je patrný z tabulky 6.2.

***cpcyc*, Lab,, KNC, DR, DΘ, DZ, KNOTROT**

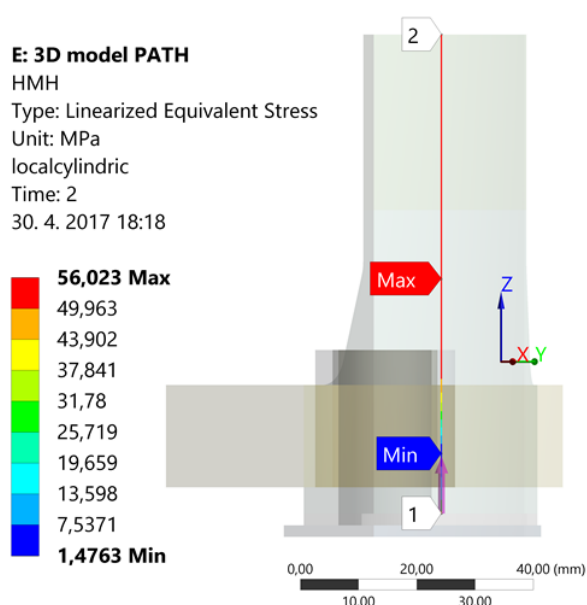
Lab	stupně volnosti znásobených uzlů sítě
KNC	číselné označení lokálního cylindrického souřadného systému („Coordinate System ID“)
DR, DΘ, DZ	souřadnice posunutí znásobených uzlů sítě (případ cylindrického souřadného systému)
KNOTROT	Parametr KNOTROT = 0 pro rotaci znásobených uzlů dle souřadného systému KNC

Tab. 6.2: Význam parametrů příkazu *cpcyc* [32].

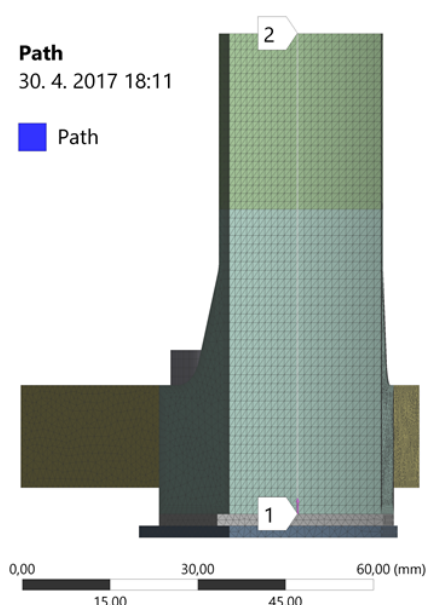
V našem konkrétním případě bude mít příkaz tvar

***cpcyc*, all,,555,,45,,0.**

Všechny stupně volnosti znásobených uzlů budou zachovány. Znásobené uzly budou posunuty o úhel 45° ve směru osy *y* lokálního cylindrického souřadného systému. „Coordinate System ID“ tohoto souřadného systému je 555 (libovolné číslo). Stejně jako v případě funkce „Cyclic Region“ je zde pro správnou funkci potřeba, aby sítě po meridiánových plochách řezu osminového modelu byly totožné. Tohoto docílíme aplikací okrajové podmínky „Mesh Control“ na příslušné plochy řezu jednotlivých těles sestavy. Parametr „Transformation“ přepneme na „Cyclic“ a dále zvolíme lokální cylindrický souřadný systém. Při takovémto nastavení je docíleno téhož cyklicky symetrického chování, jako při použití funkce „Cyclic Region“, avšak vykreslování výsledků podél cest již je umožněno.



Obr. 6.18: Průběh redukovaného napětí podél cesty.

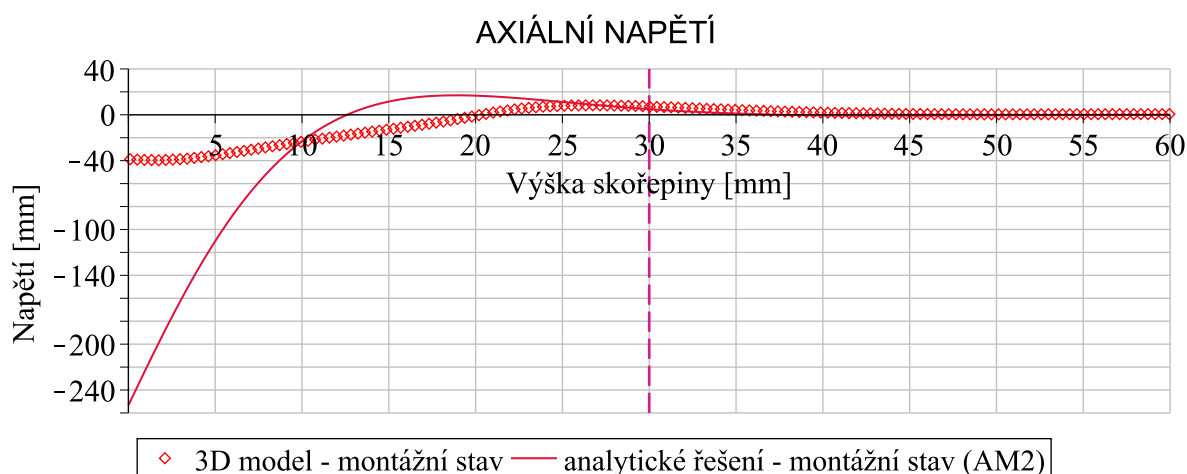


Obr. 6.19: Definovaná cesta.

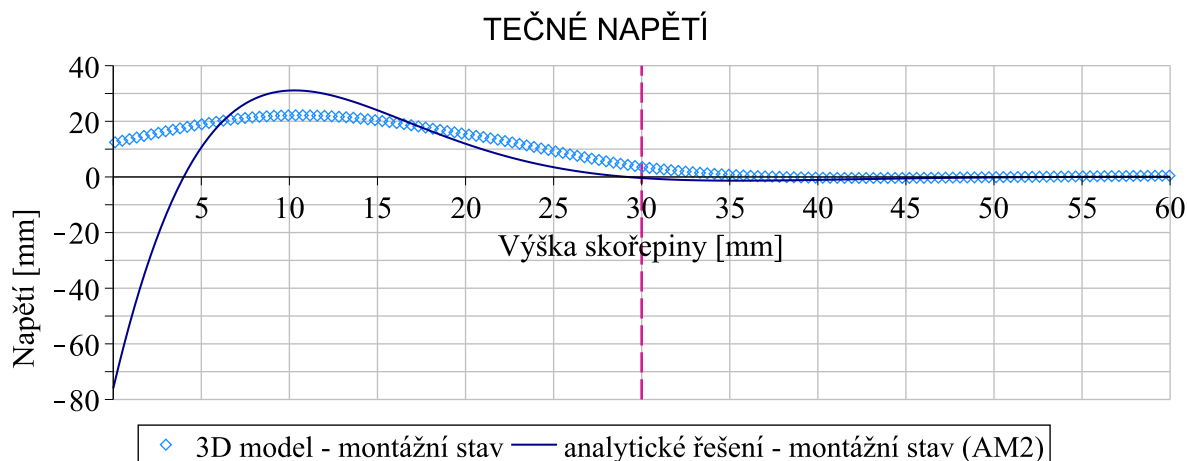
6.6.1 Zhodnocení analytického modelu příruby AM2

Nejprve se zaměříme na analytické řešení z podkapitoly 5.7 výpočtové části, popisující vliv sil předpětí v místě šroubových spojů na D-N stav krku příruby. Příruba byla v tomto případě modelována jako složené těleso, rovinná část příruby jako silně zakřivený uzavřený prut a krk příruby jako válcová momentová skořepina. Uplatněním modelu silně zakřiveného prutu na rovinnou část byla zanedbána deformace příčného průřezu – příčný průřez setrvává po dobu deformace neměnný, dochází pouze k jeho natáčení. Tento zjednodušující předpoklad však může do jisté míry kompenzovat zanedbaný objem materiálu nákržku, který v případě 3D modelu zvyšuje tuhost této rovinné části.

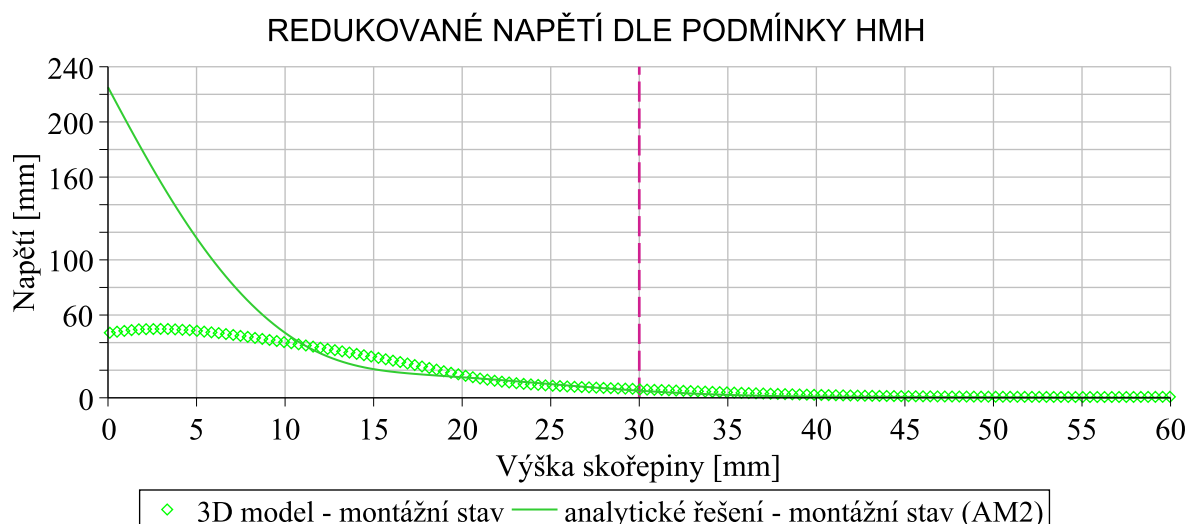
Pro účely porovnání průběhů napětí a deformace byl 3D model zatížen pouze silami předpětí ve šroubech – uvažujeme tedy montážní stav. Na obrázcích 6.20, 6.21 a 6.22 vidíme průběhy axiálního, tečného a redukovaného napětí po vnitřní ploše krku příruby, v porovnání s přesným řešením pomocí 3D modelu. Mezi jednotlivými průběhy napětí lze pozorovat určitou shodu, která je ovšem pouze kvalitativního charakteru. Průběhy napětí získané z reálného 3D modelu se vyznačují mnohem pozvolnějšími nárůsty funkčních hodnot, což lze přisoudit rozšiřující se tloušťce stěny krku příruby, kterou analytické řešení považuje za neměnnou. Extrémní hodnoty napětí v místě spoje s rovinnou částí, patrné z průběhů analytického řešení, lze přisoudit uplatněnímu Saint Venantovu principu.



Obr. 6.20: Průběhy axiálního napětí.

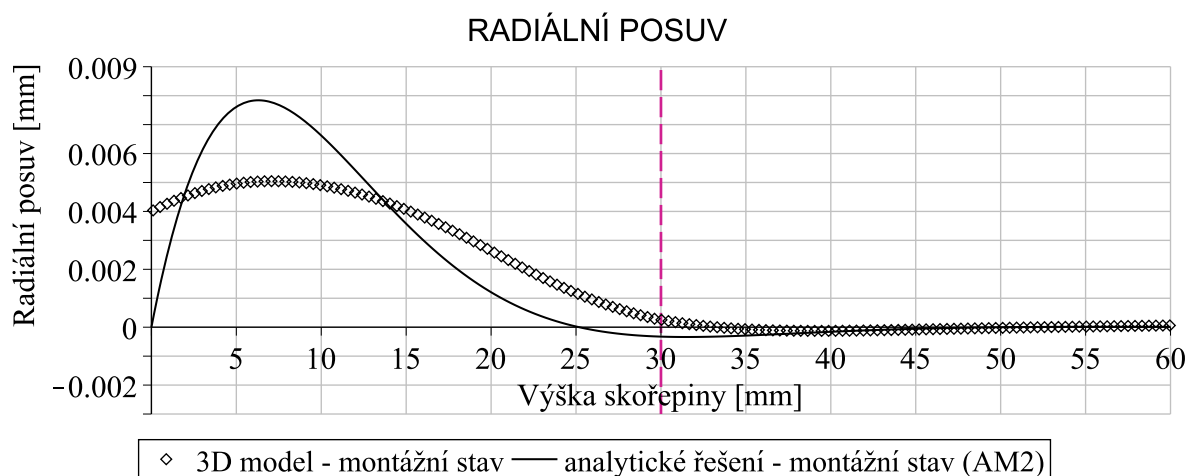


Obr. 6.21: Průběhy tečného napětí.



Obr. 6.22: Průběhy redukovaného napětí.

Pro průběh radiálního posuvu, který můžeme vidět na obrázku 6.23, platí totéž co pro průběhy napětí. Určitá kvalitativní shoda mezi průběhy je zde patrná – extrémní hodnoty se nachází v obou případech přibližně v téže místě. V důsledku rozšiřující se tloušťky stěny skořepiny však numerické řešení vykazuje pozvolnější nárůst funkčních hodnot a zároveň nižší extrémní hodnoty.

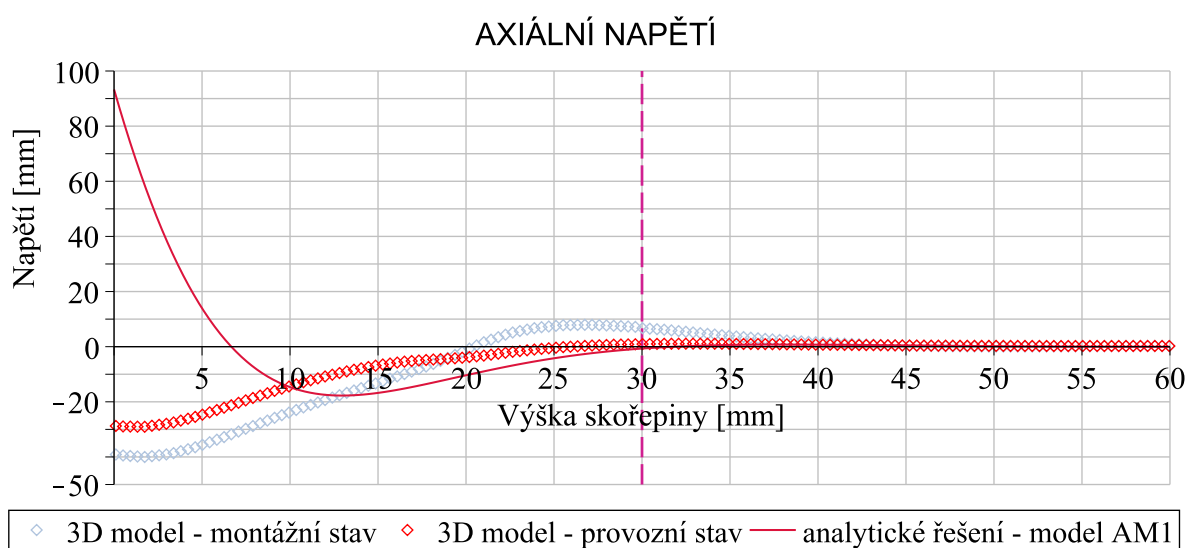


Obr. 6.23: Průběhy radiálního posuvu.

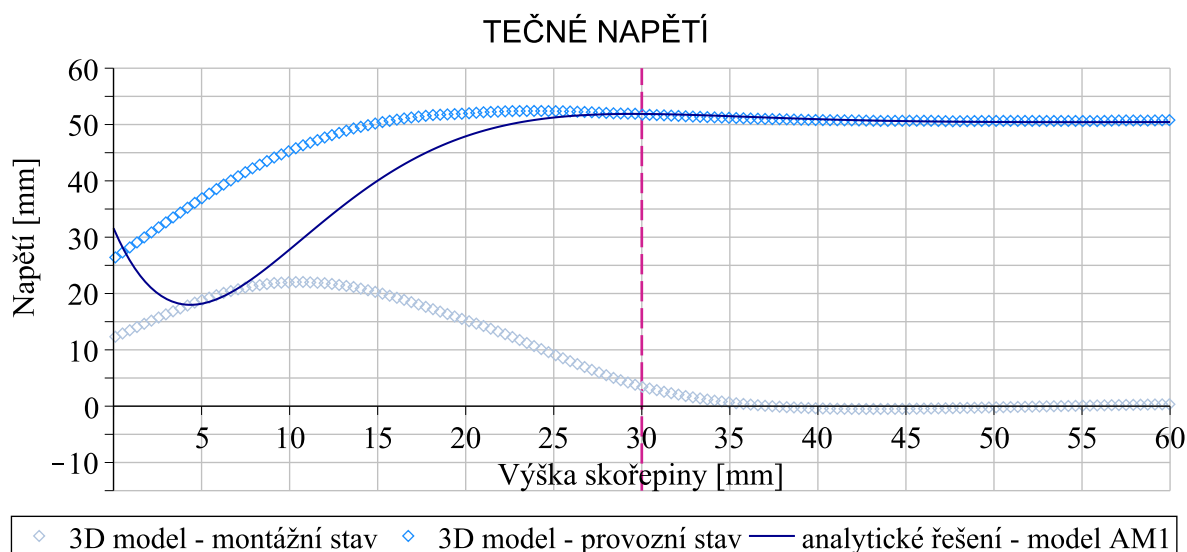
6.6.2 Zhodnocení analytického modelu příruby AM1

V podkapitole 5.4 výpočtové části jsme k přírubě přistupovali rovněž jako ke složenému tělesu. Rovinná část příruby byla modelována jako stěno-deska a krk příruby jako válcová momentová skořepina. Aby však mohly být tyto dílčí modely těles uplatněny, bylo zapotřebí přijmout značná zjednodušení týkající se jak geometrie příruby, tak jejího zatížení. Jediným uvažovaným zatížením je zde vnitřní přetlak p . V místě šroubových spojů je uvažována vazba typu vetknutí. Z geometrie je zde zanedbána rozšiřující se tloušťka krku příruby a reálný tvar stykové plochy s těsněním. Nyní se podívejme, do jaké míry se tato zjednodušení promítnou do získaných průběhů napětí a deformace.

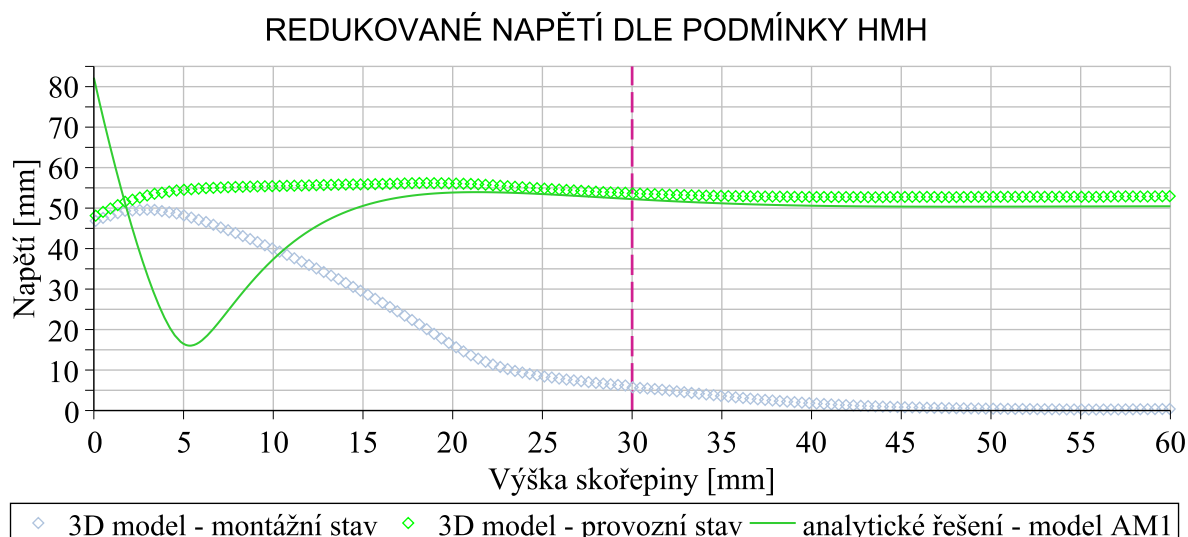
Na obrázcích 6.24, 6.25 a 6.26 vidíme průběhy axiálního, tečného a redukovaného napětí po vnitřní ploše krku příruby, v porovnání s přesným řešením pomocí 3D modelu. První věc, které si můžeme povšimnout je, že průběhy analytického řešení vykazují v oblasti spoje s rovinnou částí prudké nárůsty funkčních hodnot, vzniklé v důsledku Saint Venantova principu. I když tyto jevy pomineme, je shoda mezi jednotlivými průběhy napětí na velmi nízké úrovni, což je bezesporu důsledkem uplatněných zjednodušení. Zatímco reálný 3D model je zatěžován kombinací sil předpětí a vnitřního přetlaku (celkový provozní stav), analytický model síly předpětí nikterak nezohledňuje. V důsledku toho je analytický model příruby zatěžován vnitřním přetlakem p z nezatíženého stavu, zatímco 3D model příruby z již zatíženého, montážního, stavu. Jak jsme se přesvědčili v předchozí podkapitole, dále viz průběhy napětí v montážním stavu, tyto síly mají na celkový D-N stav příruby značný vliv. Vezmeme-li v potaz nespočet dalších zjednodušujících předpokladů, týkajících se geometrie příruby, jsou zmíněné neshody zcela opodstatněny.



Obr. 6.24: Průběhy axiálního napětí.

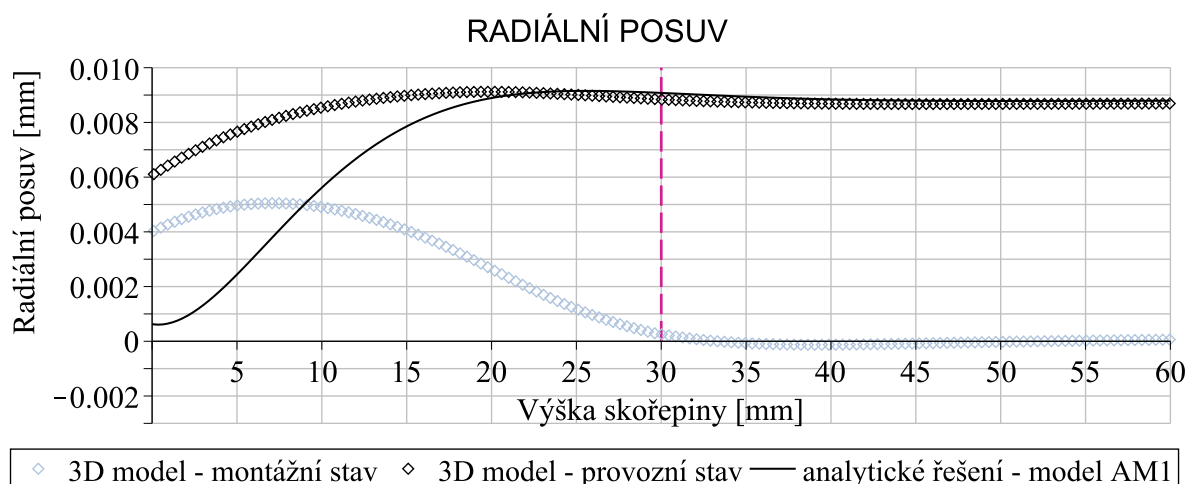


Obr. 6.25: Průběhy tečného napětí.



Obr. 6.26: Průběhy redukovaného napětí.

Vliv zanedbání sil předpětí je patrný rovněž z průběhu radiálního posuvu, viz obrázek 6.27. Zde lze pozorovat, že hodnoty radiálního posuvu 3D modelu v celkovém provozním stavu jsou navýšeny o již existující radiální posuvy, vzniklé v důsledku montážního předpětí šroubů.



Obr. 6.27: Průběhy radiálního posuvu.

6.6.3 Optimalizace analytického řešení

Jak bylo zjištěno v předchozí podkapitole, analytický model vytvořený v rámci kapitoly 5.4 výpočtové části práce je silně v rozporu se skutečným řešením pomocí 3D modelu příruby. Jak zde bylo poznamenáno, hlavním nedostatkem tohoto analytického modelu je, že nikterak nezohledňuje účinky sil předpětí, v místě spojení šrouby. Toto tvrzení však není tak docela úplné, neboť s vazbou typu vetknutí, která byla v místě šroubů uvažována, se pojí mnohem více problémů, které se nyní pokusíme odbourat.

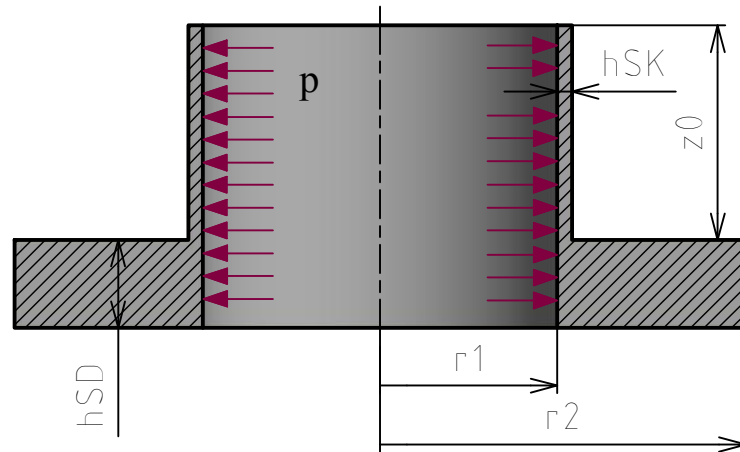
Uvažujme analytický model záměrně nezohledňující síly předpětí, zatížený pouze vnitřním přetlakem p . I když by se vazba typu vetknutí v místě šroubů v tomto případě již mohla zdát jako vyhovující, opak je pravdou. Její uplatnění by bylo plně opodstatněné v případě, kdy by uložení dřívků šroubů v dírách bylo bez vůle a přesahu a navíc by se šrouby chovaly jako dokonale tuhé.

Ani jednomu z těchto dvou požadavků však v reálném případě není vyhověno. Dle EN 1092-1+A1 jsou pro přírubu našeho typu předepsány šrouby M16, mezi válcovou plochou dříku šroubu a válcovou plochou díry pro šroub je tedy vůle o velikosti 1 mm [19]. Jak však můžeme vidět na obrázku 6.28, v reálném případě není působením vnitřního přetlaku p tato vůle vymezena.



Obr. 6.28: Radiální posuv 3D modelu v místě díry pro šroub.

Realitě by tak měl lépe odpovídat model, který bude v místě šroubů nikoliv vetknutý, ale volný, jak lze vidět na obrázku 6.29. Analytické řešení tohoto modelu je analogické jako v případě modelu AM1 s uvažovaným vetnutím, viz kapitola 5.4. Opět se jedná složené těleso, kde mezi modelem momentové skořepiny (krk příruby) a modelem stěno-desky (rovinná část příruby) působí liniová styková síla \mathcal{T} a liniový moment \mathcal{M} . Deformační podmínky zůstanou tytéž, jediné změny se projeví v okrajových podmínkách dílčího modelu stěny a desky.



Obr. 6.29: Modifikovaný model AM1 s volným koncem.

Deformační podmínky v místě uvolnění skořepiny od stěno-desky:

$$u_{\text{SKOREPINY}} = u_{\text{STENY}}, \quad (6.1)$$

$$v_{\text{SKOREPINY}} = -v_{\text{DESKY}}. \quad (6.2)$$

Pro sestavení okrajových podmínek desky je třeba zvolit referenční hladinu nulového průhybu. Tu budeme uvažovat v místě $r = r_1$. Další dvě okrajové podmínky potřebné pro vyjádření integračních konstant budou vycházet ze známých hodnot radiálního momentu \mathcal{M}_r .

$$r = r_1 : \quad \mathcal{M}_r = +\mathcal{M} - \mathcal{M}_T = +\mathcal{M} - \mathcal{T} \frac{h_{SD}}{2} \quad (6.3)$$

$$w = 0 \quad (6.4)$$

$$r = r_2 : \quad \mathcal{M}_r = 0 \quad (6.5)$$

V případě stěny již v místě $r = r_2$ nepůsobí žádný stykový tlak p_S . Radiální napětí je zde σ_r tím pádem nulové. Okrajové podmínky pro stěnu tak získáme v následujícím tvaru.

$$r = r_1 : \quad \sigma_r = \frac{\mathcal{T}}{h_{SD}} - p, \quad (6.6)$$

$$r = r_2 : \quad \sigma_r = 0. \quad (6.7)$$

Pokud bychom nyní postupovali v řešení analogicky jako v případě s uvažovaným vetknutím, viz kapitola 5.4, obdrželi bychom následující velikosti stykové síly \mathcal{T} a momentu \mathcal{M} .

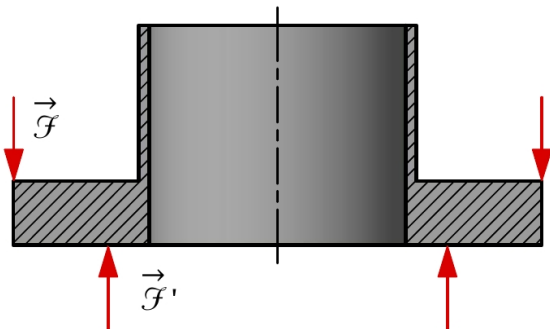
$$\mathcal{M} = 134,7 \text{ Nmm} \cdot \text{mm}^{-1}$$

$$\mathcal{T} = -29,6 \text{ Nmm}^{-1}$$

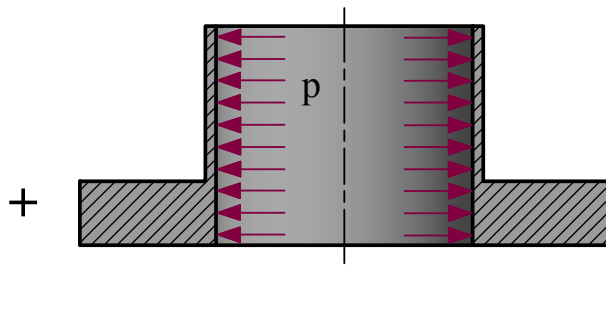
Přídavný ohybový moment \mathcal{M}_T přitom dosahuje hodnoty

$$\mathcal{M}_T = -259,1 \text{ Nmm} \cdot \text{mm}^{-1}.$$

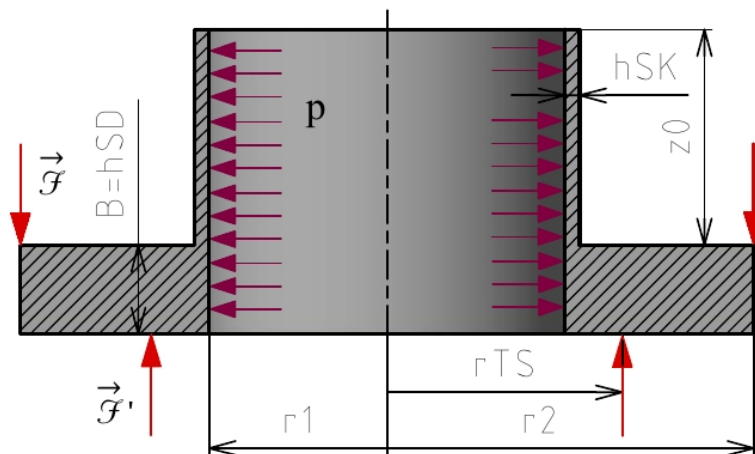
Povšimněme si nyní, že takto modifikovaný analytický model AM1 odpovídá geometrii i vazbami analytickému modelu AM2 z kapitoly 5.7, na základě kterého jsme vyšetřovali ryze montážní stav příruby, tedy napjatost v důsledku působení sil předpětí. Tato skutečnost je pro nás velmi výhodná, neboť nám umožňuje aplikaci již známé **věty o superpozici napjatosti a deformace** vytvořit analytický model, zohledňující jak síly předpětí F_i tak přetlak p . Takto vytvořený analytický model (dále značený jako AM3), viz obrázek 6.32, by měl mnohem lépe vystihovat D-N stav skutečného 3D modelu příruby v provozním stavu.



Obr. 6.30: Analytický model AM2.



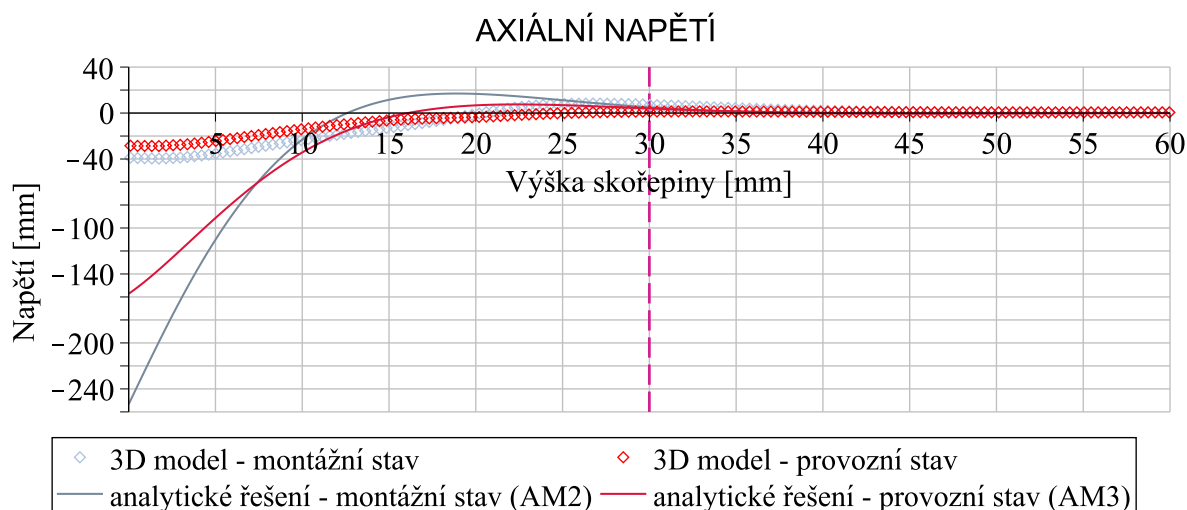
Obr. 6.31: Modifikace modelu AM1.



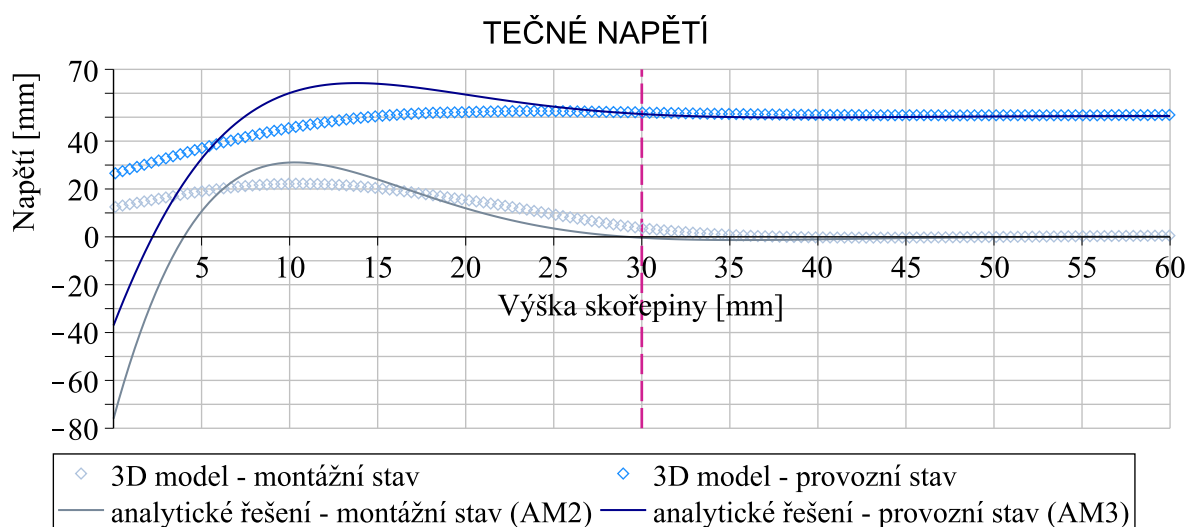
Obr. 6.32: Analytický model provozního stavu (AM3).

Zajímat nás budou opět průběhy napětí a deformace po vnitřní ploše krku příruby. Napjatost a deformace analytického modelu AM3 je dle principu superposice dána součtem napjatostí a deformací dvou dílčích modelů, AM1 modifikovaného a AM2, jak je výše schématicky znázorněno. Níže na obrázcích 6.33, 6.34 a 6.35 vidíme průběhy axiálního, tečného a redukovaného napětí dle podmínky HMM získané pomocí analytického modelu AM3, v porovnání s přesným řešením numerického 3D modelu. Z vykreslených grafů jsou patrné rovněž průběhy napětí v montážním stavu, kterému v případě analytiky odpovídá řešení dílčího modelu AM2.

Z průběhů axiálního a tečného napětí je patrné, že vytvořený analytický model vystihuje reálné průběhy napětí s větší přesností, než předešlý model s uvažovaným vetknutím. Z grafů je již patrný určitý kvalitativní soulad mezi průběhy. Z pohledu kvantitativního je však analytické řešení stále značně nepřesné. Jak můžeme vidět na obrázcích 6.33 a 6.34, průběhy analytického řešení se oproti přesnému řešení vyznačují lokálními extrémy v oblasti mezi napojením na stěno-desku a svarovým spojem s trubicí, v samotném místě spoje se stěno-deskou pak pozorujeme extrémy globální. Tyto odchylky jsou pravděpodobně způsobeny uplatněním Saint Venantova principu v kombinaci se zanedbanou rozšiřující se tloušťkou skořepiny, kterou, jak bylo demonstrováno v kapitole 5.6 výpočtové části, nelze do analytických výpočtů zahrnout.

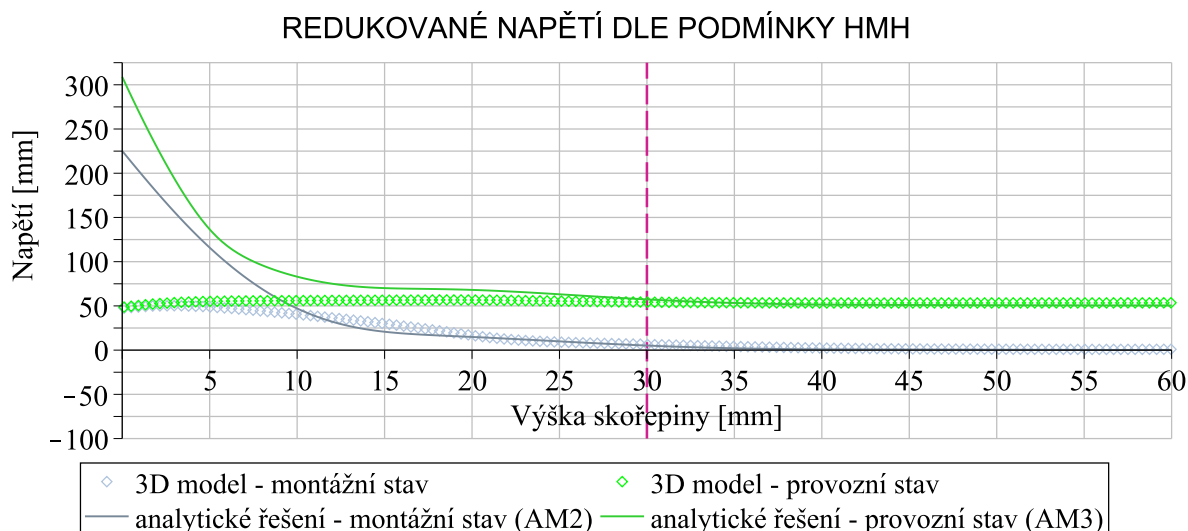


Obr. 6.33: Průběhy axiálního napětí.



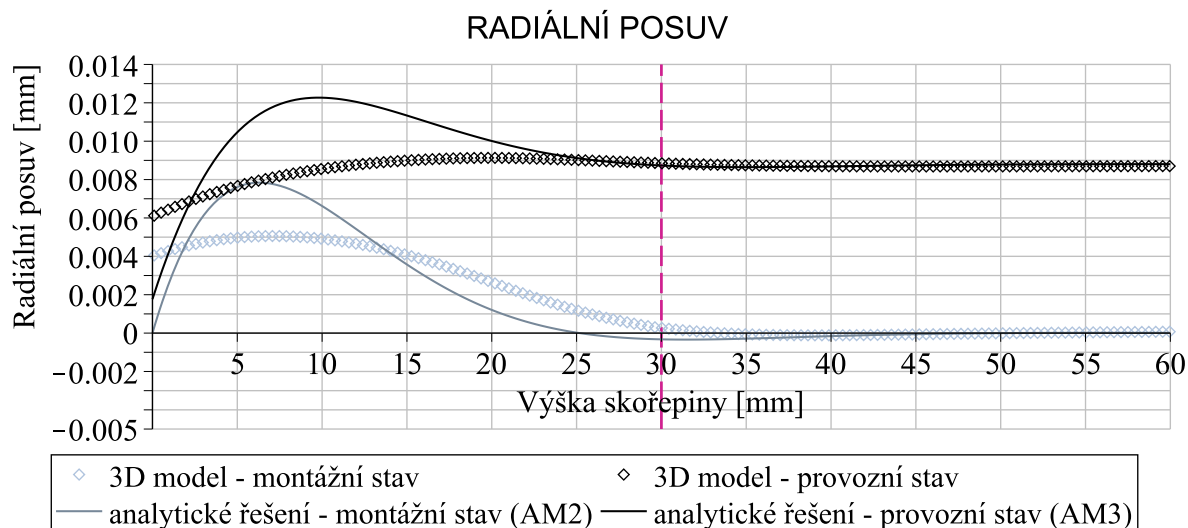
Obr. 6.34: Průběhy tečného napětí.

Na obrázku 6.35 pak můžeme vidět, jaký mají zmíněné odchylky průběhů složek napětí dopad na průběh redukovaného napětí. Zatímco numerické řešení vykazuje téměř konstantní průběh, nepřevyšující hodnotu 55 MPa, v případě analytického řešení dochází v prudkém nárůstu funkčních hodnot v oblasti spoje se stěno-deskou, a to jak v rámci montážního tak provozního stavu.



Obr. 6.35: Průběhy redukovaného napětí.

V případě průběhů radiálního posuvu, viz obrázek 6.36, lze pozorovat tytéž odchylky jako v případě napětí. Odchylka průběhů analytického řešení v místě spoje se stěno-deskou je však z velké části způsobena okrajovou podmínkou nulového radiálního posuvu, uplatněnou v rámci řešení modelu AM2, jak demonstruje průběh analytického řešení pro montážní stav.



Obr. 6.36: Průběhy radiálního posuvu.

7 Závěr

Bakalářská práce se zabývá D-N analýzou konkrétního typu přivařovací příruby s krkem. V montážním stavu je tato příruba zatížena silami F_i od předepjatých šroubů, v provozním stavu je pak celkové zatížení dáno kombinací sil předpětí a vnitřního přetlaku p od přepravovaného média. Uplatněním značných zjednodušení reálné geometrie byly pro výpočet uplatněny analytické metody, vycházející z teorie tenkostěnných, rotačně symetrických těles.

V rámci výpočtové části práce byly vytvořeny celkem dva komplexní modely příruby, jakožto složeného tělesa. Pro ověření výsledků byly tytéž modely spočteny pomocí MKP. První model (AM1) zohledňoval pouze zatížení od vnitřního přetlaku p . Příruba zde byla modelována jako kombinace válcové momentové skořepiny (krk příruby) a stěno-desky (rovinná část příruby). Ze získaných průběhů napětí a deformace byly dostatečné shody mezi analytickým a numerickým řešením pozorovány pouze v případě samostatných dílčích modelů, které nezohledňovaly silovou interakci mezi rovinnou částí a krkem příruby. Druhý model složeného tělesa (AM2) pak demonstroval vliv sil předpětí na napjatost krku příruby v montážním stavu. V případě tohoto modelu byla rovinná část příruby modelována jako silně zakřivený uzavřený prut. Průběhy napětí obou modelů složeného tělesa byly v závěru práce porovnány s přesným řešením.

V rámci výpočtové části práce byl dále zkoumán vliv zaoblení přechodu mezi rovinnou částí a krkem a vliv rozšiřující se tloušťky krku příruby. Zde bylo zjištěno, že při zaoblení o poloměru 2 mm již přechod mezi krkem a rovinnou částí příruby z hlediska mezního stavu pružnosti nepředstavuje kritickou oblast. Lineární rozšíření tloušťky stěny krku směrem k zaoblenému přechodu pak vede k pozvolnějšímu nárůstu hodnot napětí směrem ke spoji s trubicí.

V poslední kapitole byla příruba modelována v programu Ansys jako 3D těleso reálné geometrie. Snahou bylo se co nejvíce přiblížit reálným zatěžujícím podmínkám. Ze získaných výsledků je patrné, že skutečné maximální hodnoty redukovaného napětí leží mimo oblast popsanou analytickým řešením. Tato maxima se nacházela v místě styku se šrouby a dosahovala hodnot 122 MPa, což je hodnota dvakrát menší v porovnání s mezí kluzu vybrané oceli.

Na základě porovnání průběhů napětí a radiálního posuvu po vnitřní ploše krku příruby bylo zjištěno, že první model složeného tělesa (AM1), zohledňující pouze zatížení přetlakem p , není pro popis reálného problému vhodný. Značné odchylky mezi průběhy byly způsobeny zejména nevhodně zvolenou vazbou typu vetknutí v místě spojení šrouby. V případě druhého modelu složeného tělesa (AM2), reprezentujícího ryze montážní stav, byly pozorovány kvalitativní shody mezi průběhy, po kvantitativní stránce však odchylky dosahovaly vysokých hodnot.

Ve snaze napravit nedostatky analytického řešení byl v závěru práce model AM1 modifikován – namísto vazby typu vetknutí byl uvažován volný konec, který vystihuje realitu s větší přesností. Tato modifikace modelu AM1 umožnila vytvoření komplexního analytického modelu AM3, který zohledňuje celkový provozní stav příruby. Navzdory patrnému kvalitativnímu souladu mezi průběhy ani tento analytický model nevykazoval dostatečně přesné hodnoty pro hodnocení D-N stavu skutečné 3D příruby. Příčinou byl stále přetrvávající předpoklad o konstantní tloušťce krku příruby a rovněž Saint Venantův princip, uplatněný v analytice. Z tohoto plyne že analytické řešení lze použít pro přibližný odhad charakteru napjatosti a deformace, nikoliv však pro jeho kvantifikaci.

Literatura

- [1] BURŠA, Jiří, Jana HORNÍKOVÁ, Přemysl JANÍČEK. *Pružnost a pevnost* [online]. 1. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2003 [cit. 2017-02-08]. Dostupné z: <http://beta.fme.vutbr.cz/cpp/>. ISBN 80-7204-268-8.
- [2] FLORIAN, Zdeněk, Karel PŘIKRYL a Emanuel ONDRÁČEK. *Mechanika těles - statika*. 6. přeprac. vyd., v Akademickém nakl. CERM 1. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2003, 182 s. ISBN 80-214-2491-5.
- [3] FLORIAN, Zdeněk. *Pružnost a pevnost I.* (přednáška) Brno: Vysoké učení technické, Fakulta strojního inženýrství, 18. 2. 2016.
- [4] ONDRÁČEK, Emanuel, Jan VRBKA, Přemysl JANÍČEK a Jiří BURŠA. *Mechanika těles: Pružnost a pevnost II.* 4., přeprac. vyd., V Akademickém nakladatelství CERM 2. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006, 262 s. ISBN 80-214-3260-8.
- [5] FLORIAN, Zdeněk. *Pružnost a pevnost II.* (přednáška) Brno: Vysoké učení technické, Fakulta strojního inženýrství, 30. 11. 2016.
- [6] BURŠA, Jiří. *Prednaska-12* [online]. [cit. 2017-04-26]. Dostupné z: http://www.umt.fme.vutbr.cz/~jbursa/Stud_opory/Stud_opory.htm
- [7] PETRUŠKA, Jindřich. *MKP v Inženýrských výpočtech* [online]. [cit. 2017-04-26]. Dostupné z: <http://www.umt.fme.vutbr.cz/img/fckeditor/file/opory/RIV/MKP2011.pdf>
- [8] VULLO, Vincenzo. *Circular cylinders and pressure vessels — Stress analysis and design*. Switzerland: Springer International Publishing, 2014, 388 s. ISBN 978-3-319-00689-5.
- [9] TIMOSHENKO, Stephen. *History of strength of materials – With a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures*. New York: McGraw-Hill, 1953, 439 s. ISBN 0-486-61187-6.
- [10] VALENTINUZZI, Max E. a Alberto K. KOHEN. Laplace's Law: What It Is About, Where It Comes from, and How It Is Often Applied in Physiology [Retrospectroscope]. *IEEE Pulse* [online]. 2011, vol. 2, iss. 4, s. 58-64 [cit. 2017-05-7]. DOI: 10.1109/MPUL.2011.942054. ISSN 2154-2287. Dostupné z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/5962052/>
- [11] KURRER, Karl-Eugen. *The history of the theory of structures: from arch analysis to computational mechanics*. Berlin: Ernst, 2008, 848 s. ISBN 978-3-433-01838-5.
- [12] JOHNS, Robert H. a Thomas W. ORANGE. *Theoretical elastic stress distributions arising from discontinuities and edge loads in several shell-type structures*. U.S. G.P.O, 1961.
- [13] HARVEY, John F. *Theory and design of pressure vessels*. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1985, 623 s. ISBN 0-442-23248-9.
- [14] MÍVALT, T. *Deformačně napěťová analýza osově symetrického tělesa, řešena analyticky a numericky*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 83 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Kamil Novák.
- [15] NĚMEC, Daniel. *Základy ekonometrie*. (studijní text) Brno: Masarykova Univerzita, Ekonomicko-správní fakulta, 2012.

- [16] Statistics How To. *Absolute Error & Mean Absolut Error* [online]. [cit. 2017-03-18]. Dostupné z: <http://www.statisticshowto.com/absolute-error/>
- [17] KARPÍŠEK, Zdeněk. *Matematika IV: Statistika a pravděpodobnost*. 4., přeprac. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2014, 171 s. ISBN 978-80-214-4858-2.
- [18] StatSoft. *Úvod do regresní analýzy* [online]. [cit. 2017-03-23]. Dostupné z: http://www.statsoft.cz/file1/PDF/newsletter/2014_26_03_StatSoft_Uvod_do_regresni_analyzy.pdf.
- [19] ČSN EN 1092-1+A1. *Příruby a přírubové spoje – kruhové příruby pro trubky, armatury, tvarovky a příslušenství s označením PN – Část 1: Příruby z oceli*. Praha: ČESKÝ NORMALIZAČNÍ INSTITUT, 2005, 96 s.
- [20] ČSN EN 1333. *Příruby a přírubové spoje – Potrubní součásti – Definice a volba PN*. Praha: ČESKÝ NORMALIZAČNÍ INSTITUT, 2006, 8 s.
- [21] ČSN EN ISO 6708. *Potrubní části – Definice a výběr jmenovitých světlostí – DN*. Praha: ČESKÝ NORMALIZAČNÍ INSTITUT, 1996, 8 s.
- [22] *Hodnocení pevnosti zařízení a potrubí jaderných elektráren typu VVER: sekce III*. Normativně technická dokumentace A.S.I., Praha - Brno, 2001.
- [23] ČSN EN 1514-4. *Příruby a jejich přírubové spoje – Rozměry těsnění pro příruby s označením PN – Část 4: Kovová vlnitá, plochá nebo hřebenová těsnění a plněná kovová těsnění používaná pro ocelové příruby*. Praha: ČESKÝ NORMALIZAČNÍ INSTITUT, 2013, 20 s.
- [24] SHARCNet. *PLANE183* [online]. [cit. 2017-04-08]. Dostupné z: https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/16.2.3/en-us/help/ans_elem/Hlp_E_PLANE183.html.
- [25] SÖNNERLIND, Henrik. Singularities in Finite Element Models: Dealing with Red Spots. *Comsol blog* [online]. 3.6.2015 [cit. 2017-02-24]. Dostupné z: <https://www.comsol.com/blogs/singularities-in-finite-element-models-dealing-with-red-spots/>
- [26] JANÍČEK, Přemysl, Emanuel ONDRÁČEK, Jan VRBKA a Jiří BURŠA. *Mechanika těles: Pružnost a pevnost I*. 3., přeprac. vyd., V Akademickém nakladatelství CERM 1. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004, 287 s. ISBN 80-214-2592-X.
- [27] TIMOSHENKO, Stephen. *Theory of plates and shells*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1959, 580 s.
- [28] HÖSCHL, Cyril. *Pružnost a pevnost II*. Liberec: Vysoká škola strojní a textilní v Liberci, 1992, 182 s. ISBN 80-7083-104-9.
- [29] SHARCNet. *SOLID186* [online]. [cit. 2017-04-08]. Dostupné z: https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/16.2.3/en-us/help/ans_elem/Hlp_E_SOLID186.html.
- [30] SHARCNet. *SOLID187* [online]. [cit. 2017-04-08]. Dostupné z: https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/17.0/en-us/help/ans_elem/Hlp_E_SOLID187.html.

-
- [31] ČVUT. *Kontaktní úlohy* [online]. [cit. 2017-04-13]. Dostupné z: <http://mechanika2.fs.cvut.cz/old/pme/examples/kuzel/kontakt.htm>.
- [32] SHARCNet. *CPCYC* [online]. [cit. 2017-04-26]. Dostupné z: https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/16.2.3/en-us/help/ans_cmd/Hlp_C_CPCYC.html.

Seznam symbolů, veličin a zkratek

Veličina/Symbol	Jednotka	Popis
Π_L		Lagrangeův potenciál
\mathbf{K}		Globální matice tuhosti
\mathbf{U}		Matice deformačních posuvů
\mathbf{F}		Celková matice zatížení
\mathbb{T}_ε		Tenzor přetvoření
\mathbb{T}_σ	MPa	Tenzor napětí
σ_r	MPa	Radiální napětí
σ_t	MPa	Tečné napětí
σ_z	MPa	Axiální napětí
σ_n	MPa	Normálové napětí
σ_m	MPa	Meridiánové napětí
σ_{red}	MPa	Redukované napětí
dF_o	N	Elementární objemová odstředivá síla
ω	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$	Úhlová rychlost
ρ	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	Hustota
μ		Poissonova konstanta
E	GPa	Youngův modul pružnosti
h	mm	Tloušťka stěny tělesa
r_S	mm	Poloměr střednicové plochy skořepiny
r_{ts}	mm	Střední poloměr těsnění
l_0	mm	Minimální délka dlouhé skořepiny
z_0	mm	Délka momentové skořepiny
u	mm	Radiální posuv
w	mm	Průhyb
ϑ	rad	Natočení
m_r	$\text{N} \cdot \text{mm} \cdot \text{mm}^{-1}$	Liniový radiální moment
m_t	$\text{N} \cdot \text{mm} \cdot \text{mm}^{-1}$	Liniový tečný moment
m_z	$\text{N} \cdot \text{mm} \cdot \text{mm}^{-1}$	Liniový axiální moment
\mathcal{F}	$\text{N} \cdot \text{mm}^{-1}$	Liniová posouvající síla
n_z	$\text{N} \cdot \text{mm}^{-1}$	Liniová axiální normálová síla
n_t	$\text{N} \cdot \text{mm}^{-1}$	Liniová tečná normálová síla
n_m	$\text{N} \cdot \text{mm}^{-1}$	Liniová meridiánová normálová síla
\mathcal{F}	$\text{N} \cdot \text{mm}^{-1}$	Liniová síla předpětí
F_i	N	Síla předpětí

p	MPa	Tlak
$B_{(SK)}$	$\text{MPa} \cdot \text{mm}^3$	Ohybová tuhost skořepiny
$B_{(D)}$	$\text{MPa} \cdot \text{mm}^3$	Ohybová tuhost desky
β	mm^{-1}	Součinitel útlumu
A, B	MPa, $\text{MPa} \cdot \text{mm}^2$	Integrační konstanty stěny
$C_{1(SK)}, C_{2(SK)}$	mm, mm	Integrační konstanty skořepiny
$C_{1(D)}, C_{2(D)}, C_{3(D)}$	mm^{-1} , mm, mm	Integrační konstanty desky
MAE		Střední absolutní chyba
E_{\max}		Maximální chyba
R^2		Koeficient determinace
SSR		Součet čtverců reziduí
TSS		Totální součet čtverců
PN		Nominální tlak
DN		Nominální světlost
PS	bar	Nejvyšší dovolený tlak
RT	$^{\circ}\text{C}$	Referenční teplota
q_0	MPa	Přítlak na těsnění
D-N		deformačně-napěťová
PP		Pružnost a pevnost
HMH		<i>Huber-von Mises-Hencky</i> (energetická hypotéza)
MKP		Metoda konečných prvků
AM1		Model příruby s vnitřním přetlakem
AM2		Model příruby v montážním stavu
AM3		Model příruby v provozním stavu

Seznam obrázků

1.1	Prut zatížený tlakem p_1 .	3
1.2	Prut zatížený tlakem p_2 .	4
1.3	Prut zatížený silou F .	4
1.4	Dvojnásobně elementární prvek stěny [4].	7
1.5	Dvojnásobně elementární prvek desky [4].	9
1.6	Dvojnásobně elementární prvek bezmomentové skořepiny [4].	10
1.7	Dvojnásobně elementární prvek momentové skořepiny [4].	12
2.1	Uvolnění tlakové nádoby s polokulovým dnem [8].	15
3.1	Čtverce reziduí a totální čtverce.	18
3.2	Prudký nárůst funkčních hodnot analytického řešení.	19
3.3	Odchýlení průběhů analytického a numerického řešení.	19
4.1	Příruba EN 1092-1/11/E/DN65x2,9/PN40/P245GH.	21
4.2	Rozměry uvažovaného těsnění.	22
5.1	Zjednodušení geometrie.	23
5.2	Analytický model příruby AM1.	23
5.3	Prvek PLANE183 [24].	24
5.4	Radiální posuv složeného tělesa v MKP.	24
5.5	Vetknutá rotačně symetrická stěna.	25
5.6	Uvolnění stěny.	25
5.7	Průběhy napětí σ_r a σ_t .	27
5.8	Průběh radiálního posuvu u .	28
5.9	Vetknutá momentová skořepina.	28
5.10	Průběhy napětí po vnitřní ploše.	30
5.11	Průběhy napětí po vnější ploše.	30
5.12	Průběhy radiálního posuvu střednicové plochy.	32
5.13	Uvolnění skořepiny a stěno-desky.	33
5.14	Staticky ekvivalentní zatížení stěno-desky.	33
5.15	Řešení dílčího modelu stěny.	34
5.16	Řešení dílčího modelu desky.	35
5.17	Řešení skořepiny.	36
5.18	Průběhy radiálního posuvu.	37
5.19	Průběhy napětí po vnější ploše skořepiny.	38
5.20	Průběhy napětí po vnitřní ploše skořepiny.	39
5.21	Průběhy radiálního posuvu.	40
5.22	Průběhy průhybu.	41
5.23	Průběhy napětí po horní ploše stěno-desky.	42
5.24	Průběhy napětí po spodní ploše stěno-desky.	42
5.25	Průběhy radiálního napětí po tloušťce stěno-desky h_{SD} .	43
5.26	Detail napjatosti zaoblení při poloměru 6 mm – HMH [MPa].	44
5.27	Průběhy napětí po vnitřní ploše skořepiny.	44
5.28	Proměnná tloušťka skořepiny.	45
5.29	Průběhy redukovaného napětí po vnější ploše.	46
5.30	Průběhy redukovaného napětí po vnitřní ploše.	46
5.31	Průběhy radiálního posuvu.	47
5.32	Analytický model příruby AM2.	47
5.33	Střední poloměr těsnění r_{ts} .	48

5.34	Uvolnění rovinné části a skořepiny.	49
5.35	Silně zakřivený prutový kroužek.	49
5.36	Jednonásobně elementární prvek kroužku [28].	50
5.37	Přetvoření rovinné části příruby.	50
5.38	Zatížení v příčném průřezu.	51
5.39	Uvolněná momentová skořepina.	52
5.40	Průběhy napětí po vnější ploše.	53
5.41	Průběhy napětí po vnitřní ploše.	54
5.42	Průběhy radiálního posuvu.	55
6.1	Osmínový model geometrie sestavy.	57
6.2	Části modelu příruby.	58
6.3	Cylindrický souřadný systém.	58
6.4	Funkce „Inflation“ a „Face Meshing“.	59
6.5	Sít o oblasti stykové plochy s hlavou šroubu.	59
6.6	Výsledná konečnoprvková síť.	60
6.7	Prvek SOLID186 [29].	60
6.8	Prvek SOLID187 [30].	60
6.9	Definice kontaktu šroubu s přírubou.	61
6.10	Deformační okrajové podmínky.	62
6.11	Silové okrajové podmínky.	62
6.12	Radiální posuv složeného tělesa v MKP.	63
6.13	HMH [MPa] – Detail 1.	63
6.14	HMH [MPa] – Detail 2.	63
6.15	Redukované napětí příruby v řezu.	64
6.16	Radiální napětí příruby v řezu.	64
6.17	Totální deformace příruby.	65
6.18	Průběh redukovaného napětí podél cesty.	66
6.19	Definovaná cesta.	66
6.20	Průběhy axiálního napětí.	67
6.21	Průběhy tečného napětí.	67
6.22	Průběhy redukovaného napětí.	68
6.23	Průběhy radiálního posuvu.	68
6.24	Průběhy axiálního napětí.	69
6.25	Průběhy tečného napětí.	69
6.26	Průběhy redukovaného napětí.	70
6.27	Průběhy radiálního posuvu.	70
6.28	Radiální posuv 3D modelu v místě díry pro šroub.	71
6.29	Modifikovaný model AM1 s volným koncem.	71
6.30	Analytický model AM2.	72
6.31	Modifikace modelu AM1.	72
6.32	Analytický model provozního stavu (AM3).	72
6.33	Průběhy axiálního napětí.	73
6.34	Průběhy tečného napětí.	73
6.35	Průběhy redukovaného napětí.	74
6.36	Průběhy radiálního posuvu.	74

Seznam tabulek

4.1	Nominální světlost a tlak.	21
5.1	Počet elementů a uzlů složeného tělesa.	25
5.2	Počet elementů a uzlů.	25
5.3	Zhodnocení průběhů napětí vetknuté stěny.	27
5.4	Zhodnocení průběhů radiálního posuvu stěny.	28
5.5	Zhodnocení průběhů napětí po vnitřní ploše skořepiny.	31
5.6	Zhodnocení průběhů napětí po vnější ploše skořepiny.	31
5.7	Zhodnocení průběhů radiálního posuvu skořepiny.	32
5.8	Zhodnocení průběhů radiálního posuvu skořepiny.	38
5.9	Zhodnocení průběhů napětí po vnější ploše skořepiny.	39
5.10	Zhodnocení průběhů napětí po vnitřní ploše skořepiny.	40
5.11	Zhodnocení průběhů napětí po vnitřní ploše skořepiny.	44
5.12	Zhodnocení průběhů napětí po vnější ploše skořepiny.	54
5.13	Zhodnocení průběhů napětí po vnitřní ploše skořepiny.	54
5.14	Zhodnocení průběhů radiálního posuvu skořepiny.	55
6.1	Počet použitých elementů a uzlů 3D sestavy.	61
6.2	Význam parametrů příkazu <i>cpcyc</i> [32].	66